

## 5. 自动控制理论基础

### 5.1 闭环(反馈)控制系统的组成、分类和对其要求

#### 5.1.1 闭环(反馈)控制系统的基本组成和术语

##### (1) 闭环控制的基本原理

把输出量测量出来,经物理量的转换,再反馈到输入端与由希望值所确定的参考输入信号进行比较,并

依比较后的偏差,通过控制器产生控制作用来对被控对象进行控制,该控制应能减小系统的偏差,使系统的输出量趋于所希望的值。参考图 5.1-1。

##### (2) 闭环控制系统的基本组成

根据反馈控制的基本原理,一个闭环控制系统的基本组成如图 5.1-1。其中的基本元件有:

**被控对象** 闭环控制系统中所要求控制的装置或

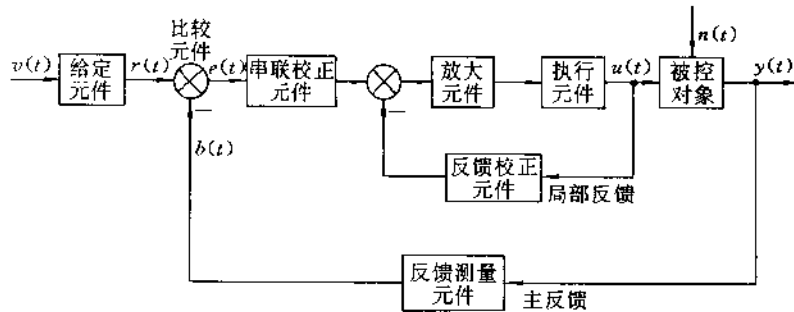


图 5.1-1 典型闭环(反馈)控制系统方框图

生产过程。

**反馈测量元件** 是用来测量被控量且将其转换成能与参考输入信号进行比较并反馈到输入端的元件。它通常为一比例元件。

**给定元件** 是将给定值转换成能和主反馈信号进行比较的信号(即参考输入信号)的元件(若给定值能直接和主反馈信号比较,则给定元件就省去了)。

**比较元件** 它的职能是将主反馈信号与参考输入信号进行比较,产生偏差信号。比较元件往往不是一个专门的物理元件,多数情况是和测量元件或线路结合在一起的。

**放大元件** 它的职能是对微弱的偏差信号进行变换放大,以满足执行元件对能量形式和功率大小的需要。

**执行元件** 它的职能是直接对被控对象进行操作,使被控量趋向希望值。

**校正元件** 或称校正装置,它用以稳定控制系统、改善和提高系统性能。有反馈校正和串联校正两种形式。它们是根据对系统性能的要求,在系统设计时选定加入的。

##### (3) 反馈控制系统中常用的名词和术语

**输出量(被控制量)  $y(t)$**  被控对象中要求按一定规律实现控制的物理量。控制的目的在于使它维持在希望值给定的数值上。

**希望值(指令、给定值)  $v(t)$**  由控制者确定的对系统预定的指令性量值。

**参考输入信号  $r(t)$**  是直接输入到反馈系统比较元件上的信号。它一般正比于希望值,是系统的实际输入量。

**主反馈信号  $b(t)$**  是被控量经反馈测量元件变换处理后再送到比较元件中的反馈量。主反馈信号  $b(t)$  与参考输入信号  $r(t)$  比较后产生偏差信号  $e(t)$ 。因为只有量纲相同的物理量才能进行比较,所以  $b(t)$  与  $r(t)$  有相同的量纲。

**偏差信号  $e(t)$**  它是输入信号与主反馈信号之差,即  $e(t) = r(t) - b(t)$ 。是使反馈系统动作的最原始控制信号,通常很微弱,但却是闭环系统产生控制动作的基础。

**控制量  $u(t)$**  执行元件作用于被控对象的控制信号,通常具有一定的功率,并且是能够为被控对象接

受的一种物理量。

**干扰(扰动)**  $n(t)$  是系统不需要而又难以避免的输入,它可来自系统之外,也可能来自系统内部。

**输入量** 是指对系统输出量有直接影响的输入,包括希望值  $v(t)$  及干扰  $n(t)$  两种。

### 5.1.2 反馈控制系统的分类及名称

#### (1) 按希望值(指令)的特征分类

**恒值控制系统** 当系统的希望值是恒定常数时,称为恒值控制系统。如生产过程中的温度、压力、流量、液位高度等控制系统属于这一类。

**程序控制系统** 当系统的希望值按预先给定的规律(又称程序)变化时,即系统的希望值是已知的时间函数时,称为程序控制系统。如热处理炉温控制系统的升温、保温、降温过程和机械加工中的程序控制机床都是按照预先设定的规律进行控制的,这类系统属于程序控制系统。

**随动系统** 如果系统的指令是未知的时间函数,且要求系统输出量精确地跟随指令的变化而变化,这种系统称为随动系统。若随动系统的输出量是机械位移(或转角)、速度(或转速)、加速度(或角加速度)、力等机械物理量,则称这样的随动系统为伺服系统。

#### (2) 按描述系统的数学表达式特性分类

##### A. 线性系统和非线性系统

**线性系统**——若描述系统运动规律的数学方程为线性方程,则这种系统称为线性系统。线性系统满足叠加原理和均匀定理。

**非线性系统**——若描述系统运动规律的数学方程为非线性方程,则这种系统称为非线性系统。非线性系统不满足叠加原理。

##### B. 定常系统和时变系统

**定常系统** 如果描述系统的数学方程中所有系数是不随时间而变化的常数,则称其为定常系统。

**时变系统** 若描述系统的数学方程的系数是时间的函数,则称其为时变系统。

#### (3) 按控制系统中的信号性质分类

**连续系统** 当系统各部分的信号都是时间的连续函数时,称其为连续系统。连续系统的运动特性可用微分方程描述。

**离散系统** 当系统的一处或数处的信号是脉冲序列或数字编码时,称其为离散控制系统。离散控制系统的运动特性可用差分方程描述。

#### (4) 按反馈控制技术方法不同分类

**最优控制** 要求控制系统的性能按某种技术性能

指标达到最优称最优控制。例如,使误差最小,控制过程中消耗的能量最小,控制过程中动态品质最平稳等。最优控制方法建立在被控对象必须能够精确描述的基础上,它需要有一个精确的数学模型。在数学模型已经精确建立的基础上,通过精确计算,利用现代计算设备就可以实现最优控制。

**自适应控制** 自适应控制系统其控制器能自动地适应被控对象特性的变化,并维持良好的控制效果。闭环自适应控制分为两类:一种称为模型参考自适应控制,这类自适应控制系统中有一参考模型,以这一不变的参考模型为标准,力求使变化了的对象经过自动调整的反馈校正之后仍然与参考模型相一致。它适用于系统数学模型较为确定的机电设备的控制。另一种闭环自适应控制称为自校正控制,其基本思想是,利用过程中的动态信息,不断辨识确定被控对象动态特性的变化,将辨识得到的结果随时用于调整控制器的参数。这种自适应控制特别适用于对象结构不十分确切的情况,如化工生产过程的控制。

**模糊控制** 模糊控制是将人的思维和模糊逻辑推理的方法用于闭环控制中。这种控制方法不需建立控制过程的精确数学模型,而完全凭人的经验知识“直观”地进行控制。例如,控制一个燃烧炉的进气阀门开度的大小,可以根据燃烧炉内的温度和前室压力的大小进行推断。按照“若温度很高,或压力超过正常,则关闭阀门”、“若温度高,且压力正常,则阀门半开”这样一些模糊语言规则进行控制。这种系统主要是通过模糊控制器对系统工作过程进行控制的。模糊控制器的中心工作是依据语言规则进行模糊推理,这个语言规则是根据操作者或专家的经验知识总结而制定出来的(亦称知识库),规则的形式很象计算机程序设计中的条件语句“IF... THEN...”,把这些规则经过必要的数据处理,存放到模糊控制器中。模糊控制器则是根据输入给它的模糊信息(该模糊信息是将模糊控制器之前的精确值进行模糊化而来的),按照事先制定好的语言控制规则和推理法则,作出模糊控制决策,再把这模糊控制决策信息转化成精确数值(称反模糊化)后去控制系统的工作过程。一个模糊控制器的控制过程如图 5.1-2 所示。

模糊控制方法有:查表法、专用硬件模糊控制器、软件模糊推理法等。

### 5.1.3 对反馈控制系统的基本要求

#### (1) 对稳定性的要求

由于系统存在惯性,当系统结构和参数匹配不当

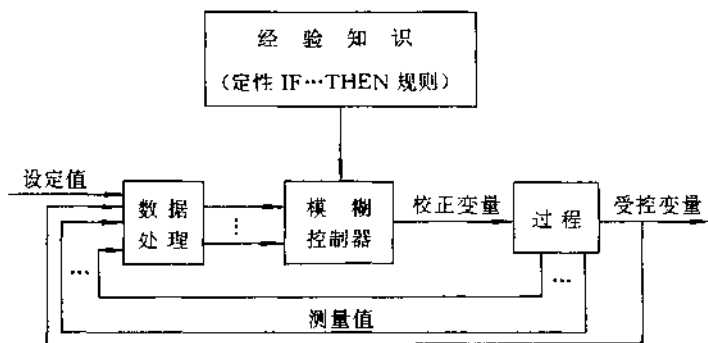


图 5.1-2 模糊控制器的控制过程

时,将会使系统输出响应呈现等幅振荡或发散振荡情况,不能正常稳定地工作。因此,对系统的首要要求是能稳定地工作。

(2) 对暂态性能(或称过渡过程性能,也称动态品质)的要求

系统的动态品质主要指系统输出响应的快速性和超调量。一个好的系统应该是既过渡过程时间短又过渡过程平稳(即超调量小)。

(3) 对稳态性能的要求

系统的稳态性能是用稳态误差来评价的。系统的稳态精度要高,即稳态误差要小。

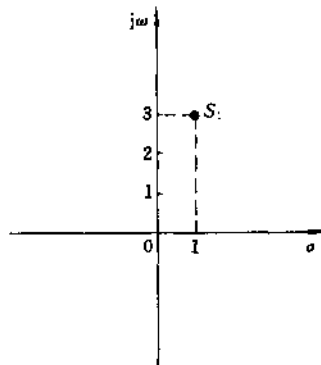


图 5.2-1 s 平面和其上的一个点  $s_1$

## 5.2 有关的数学基础知识

### 5.2.1 复平面和零点-极点图

(1) 复数和复平面

形如  $s = \sigma + j\omega$  的数叫复数,其中  $\sigma$  和  $\omega$  都是实数,分别叫复数  $s$  的实部和虚部,记为

$$\sigma = \text{Re}(s)$$

$$\omega = \text{Im}(s)$$

在平面直角坐标系上,把横轴的单位取为 1(称实轴),纵轴的单位取为  $j$ (称虚轴),所构成的平面叫复平面,也称  $s$  平面,如图 5.2-1。因此,一个复数可用复平面上的一点来表示,复平面上点的坐标就是复数的实部和虚部。例如,复数  $s_1 = 1 + j3$ ,在图 5.2-1 的复平面上表示为点  $s_1$ 。

(2) 复变量

可以取得各复数值的变复数称复变量,它能够用复平面上的动点来表示。

(3) 复变函数

如果在复平面  $s$  上的  $D$  域内,对于任意点  $s = x + jy$  都有对应的复数值  $w = u + jv$ ,那么就称  $w$  是  $s$  的

复变函数,并记为

$$w = F(s) \quad (5.2-1)$$

自变量  $s = x + jy$  的每一个值可以用  $s(x, y)$  平面上的点来表示,而对应的函数值  $w = u + jv$  可用  $w(u, v)$  平面上的点来表示。因此,从几何观点来看,给出了一个复变函数(5.2-1),就是给出了一个从  $s$  平面上点  $(x, y)$  到  $w$  平面上点  $(u, v)$  之间的对应关系,如图 5.2-2。

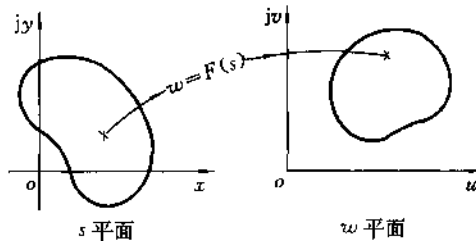


图 5.2-2 s 平面与  $w$  平面对应关系图

(4) 复变函数的零点、极点和零点-极点图

**解析函数** 如果复变函数  $F(s)$  在一个域  $D$  内每

一个点上都是可导的时候,就说  $F(s)$  是域  $D$  上的解析函数,或说  $F(s)$  在域  $D$  上是解析的。

**奇点** 凡是使得复变函数  $F(s)$  为不解析的点,叫做复变函数的奇点。

**零点和极点** 对于复变函数  $w = F(s)$ , 如果当  $s = a$  时有  $F(s) = 0$ , 则称  $s = a$  是函数  $F(s)$  的一个零点。如果当  $s \rightarrow b$  时, 有  $|F(s)| \rightarrow \infty$ , 则称  $s = b$  是函数  $F(s)$  的一个极点。例如函数

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+2)^3(s^2+1)} \quad (5.2-2)$$

$s = -3$  为其一阶零点;  $s = -2$  为其三阶极点,  $s = j$  和  $s = -j$  为其另外两个一阶极点。

**零点-极点图** 在复平面上把一个复变函数的零点和极点的位置分别用“。”和“x”标志出来,并对高于1阶的零点和极点的阶数用括号标注在相应的零点和极点附近,这样的图就叫做复变函数的零点-极点图。例如,函数式(5.2-2)的零点-极点图如图 5.2-3 所示。

5.2.2 拉氏变换的基本知识

拉普拉斯变换简称为拉氏变换,是求解线性微分方程的简捷方法。更重要的是,在古典控制理论的研究中,由于采用了这一方法,能把系统的动态数学模型很方便地转换为系统的传递函数,并由此发展出用传递函数的零点和极点分布、频率特性等间接分析和设计控制系统的工程方法。

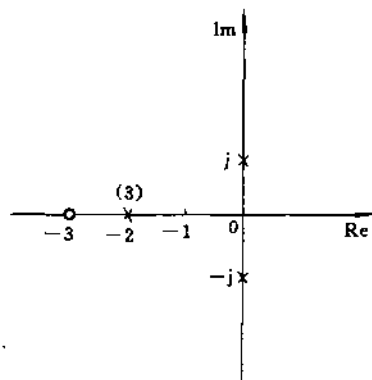


图 5.2-3 复变函数的零点-极点图

(1) 拉氏变换的定义

设有函数  $f(t)$ ,  $t$  为实变量, 如果线性积分

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (s = \sigma + j\omega \text{ 为复变量}) \quad (5.2-3)$$

存在, 则称其为函数  $f(t)$  的拉氏变换。变换后的函数是复变量  $s$  的函数, 记作  $F(s)$  或  $\mathcal{L}[f(t)]$ , 即

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5.2-4)$$

称  $F(s)$  为  $f(t)$  的象函数, 而  $f(t)$  为  $F(s)$  的原函数。

(2) 拉氏变换表

为了工程应用方便, 常把  $f(t)$  和  $F(s)$  的对应关系编成表格。常用函数的拉氏变换列于表 5.2-1。

表 5.2-1 常用函数拉氏变换表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
$1 - e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \varphi)$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$
$\frac{1}{b-a} [(c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}]$	$\frac{s+c}{(s+a)(s+b)}$	$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		

表 5.2-2 拉氏变换的基本定理

定理名称	定理内容
线性定理	$\mathcal{L}[Af_1(t) \pm Bf_2(t)] = AF_1(s) \pm BF_2(s)$ A、B 为常数
微分定理	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
积分定理	$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f(0)$
延时定理	$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as}F(s), a > 0$
s 域平移定理	$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
终值定理	若函数 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$ , 且 $F(s)$ 在 $s$ 平面的右半平面及除原点外的虚轴上解析, 则有终值 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

### 5.3 线性定常系统的数学模型

系统的数学模型是其运动特性的数学表达式。在线性定常连续系统中,常用的数学模型有微分方程、传递函数和频率特性。

#### 5.3.1 微分方程

##### (1) 线性化

自动控制元件与系统的运动方程常常是非线性的,而非线性微分方程研究系统的运动规律是很困难的,故尽量对所研究的系统进行线性化处理,然后用线性理论进行分析。对于非线性函数的线性化方法有两种:一种方法是忽略那些比较次要的非线性因素,如小的死区、磁滞和干摩擦等;另一种是小偏差线性化法。

小偏差线性化法是将一个非线性函数  $y = f(x)$ , 在其工作点  $(x_0, y_0)$  展开成台劳级数,然后忽略二次以上的高阶项,就可得到代替原来非线性函数的线性化增量方程。

(A) 对具有一个自变量的非线性函数  $f(x)$  的小偏差线性化增量方程为

$$\Delta y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \Delta x \quad (5.3-1)$$

(B) 对多变量的非线性函数  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的小偏差线性化增量方程为

$$\Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}} \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}} \Delta x_n \quad (5.3-2)$$

对小偏差线性化的几点说明:

- 应用小偏差线性化时,必须注明稳态工作点的参数值,因为工作点不同,得出的线性微分方程的系数也不同。

- 应用小偏差线性化得到的线性微分方程是增量方程式,但为了书写简洁,一般习惯上增量符号不写出来。为研究方便,系统工作点都视为坐标原点。

- 小偏差线性化的条件:第一,非线性函数中各变量在系统的动态过程中偏离稳态工作点的偏差要很小(为微小增量);第二,非线性函数在稳态工作点处满足台劳级数展开条件,即非线性函数对各个变量的各阶导数(或偏导数)均存在。

##### (2) 微分方程列写举例

例 图 5.3-1 所示为一滑阀控制液压缸原理图,其输入量为滑阀芯位移  $x_v$ , 输出量为液压缸活塞位移  $y$ , 试求  $y$  对  $x_v$  的线性化微分方程。

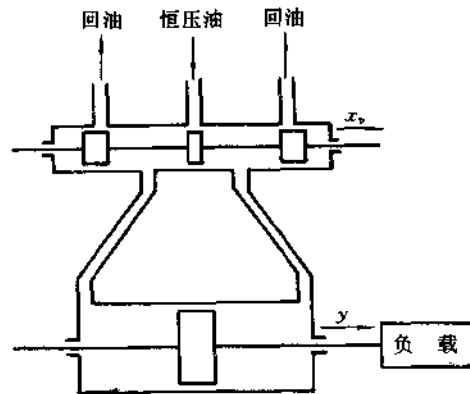


图 5.3-1 滑阀控制液压缸原理图

[解] 根据流体力学的节流公式可推得

$$q_t = C_d w x_v \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - p_t)} \quad (5.3-3)$$

式中  $q_t$ ——工作流量(或称负载流量);

$C_d$ ——流量系数;

$w$ ——滑阀的面积梯度;

$x_v$ ——阀芯位移;

$\rho$ ——油液密度;

$p_s$ ——工作压力;

$p_l$ ——负载压力。

由上式可知,因  $C_d, w, \rho, p_s$  为常数,故  $q_l$  是一个取决于  $x_v$  和  $p_l$  的双变量非线性函数,因此,它又可写成

$$q_l = f(x_v, p_l) \quad (5.3-4)$$

根据式(5.3-2)可得工作流量  $q_l$  的线性化增量方程

$$\Delta q_l = \left. \frac{\partial f}{\partial x_v} \right|_{x_{v0}, p_{l0}} \Delta x_v + \left. \frac{\partial f}{\partial p_l} \right|_{x_{v0}, p_{l0}} \Delta p_l \quad (5.3-5)$$

式(5.3-5)可写为

$$\Delta q_l = K_q \Delta x_v - K_c \Delta p_l \quad (5.3-6)$$

式中  $K_q = \left. \frac{\partial f}{\partial x_v} \right|_{x_{v0}, p_{l0}}$ ;  $K_c = - \left. \frac{\partial f}{\partial p_l} \right|_{x_{v0}, p_{l0}}$

如果以  $q_m$  表示使活塞移动的流量,以  $q_t$  表示泄漏流量,以  $q_v$  表示体积压缩流量,根据液流连续性原理则有

$$q_l = q_m + q_t + q_v$$

并有  $\Delta q_l = \Delta q_m + \Delta q_t + \Delta q_v$  (5.3-7)

而  $q_m, q_t, q_v$  及其相应的增量分别为

$$q_m = A \frac{dy}{dt}, \quad \Delta q_m = A \frac{d(\Delta y)}{dt} \quad (5.3-8)$$

$$q_t = C_t p_l, \quad \Delta q_t = C_t \Delta p_l \quad (5.3-9)$$

$$q_v = \frac{V_t}{\beta_c} \frac{dp_l}{dt}, \quad \Delta q_v = \frac{V_t}{\beta_c} \frac{d(\Delta p_l)}{dt} \quad (5.3-10)$$

式中  $A$ ——油缸工作面积;

$C_t$ ——油缸总泄漏系数;

$V_t$ ——滑阀出口至液压缸活塞两腔的总容积;

$\beta_c$ ——油的弹性模量。

液压缸的力平衡方程为

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} = p_l A \quad (5.3-11)$$

式中  $M$ ——活塞及负载的质量;

$B$ ——粘性阻尼系数。

将式(5.3-7)~式(5.3-11)联立,消去中间变量,得活塞位移  $y$  对滑阀位移  $x_v$  的线性化微分方程

$$\frac{M V_t}{4 \beta_c A^2} \frac{d^3(\Delta y)}{dt^3} + \frac{M(C_t + K_c)}{A^2} \frac{d^2(\Delta y)}{dt^2} + \frac{d(\Delta y)}{dt} = \frac{K_q}{A} \Delta x_v \quad (5.3-12)$$

当活塞及负载质量  $M$  小得可以忽略不计时,则上式可简化成

$$\frac{d(\Delta y)}{dt} = \frac{K_q}{A} \Delta x_v \quad (5.3-13)$$

### 5.3.2 传递函数

#### (1) 定义

线性定常系统在零初始条件下,其输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比称为该系统的传递函数。

设描述线性定常系统运动特性的微分方程为

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \cdots + b_1 x^{(1)} + b_0 x \end{aligned} \quad (5.3-14)$$

式中,  $y$  为系统的输出量,  $x$  为系统的输入量,  $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$  及  $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0$  为由系统结构、参数决定的常数。

设系统初始值均为零,对式(5.3-14)两端进行拉氏变换,得

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0] Y(s) \\ = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0] X(s) \end{aligned}$$

若以  $G(s)$  表示系统的传递函数,则有

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (5.3-15)$$

#### (2) 关于传递函数的几点说明

- 传递函数只适用于线性定常系统。
- 和微分方程一样,传递函数表示系统的运动特性,它与微分方程一一对应。
- 系统的传递函数只取决于该系统的结构和参数,与输入量的形式无关。
- 传递函数是复数  $s$  的函数,一般为有理真分式,对实际系统来说,传递函数分子多项式的最高阶次  $m$  不高于分母多项式的最高阶次  $n$ ,即  $m \leq n$ 。分母中  $s$  的最高阶次为  $n$  时,则称为  $n$  阶系统。
- 在传递函数式(5.3-15)中,其分子多项式  $b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 = 0$  的根称为传递函数的零点;其分母多项式  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$  的根称为传递函数的极点。所以传递函数可以表达为零-极点形式,有

$$\begin{aligned} G(s) &= K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{K' \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \end{aligned} \quad (5.3-16)$$

式中,  $K'$  是传递函数用零、极点形式表示时的传递系数;  $z_1, \cdots, z_m$  为传递函数的零点;  $p_1, \cdots, p_n$  为传递函数的极点。

传递函数的零、极点数值完全取决于系数  $b_m, \dots, b_0$  及  $a_n, \dots, a_0$ , 即取决于系统的结构参数。一般  $z_i$  和  $p_i$  可为实数, 也可为复数, 且若为复数, 必共轭成对。将系统的零、极点标在复平面上, 则得传递函数的零、极点分布图。因此, 系统的零、极点分布图也是一种系统的数学模型。如图 5.3-2 表示了一个具有一个零点  $z_1 = -2$ , 和三个极点  $p_1 = -3, p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j$  的三阶系统零、极点分布图。

型环节的输入量和输出量。

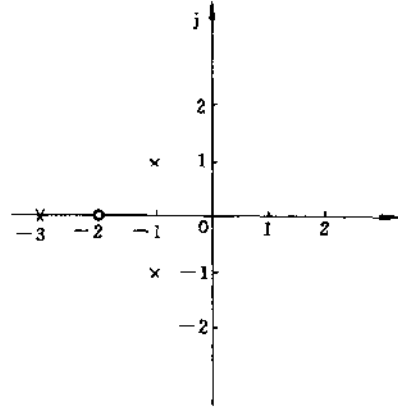


图 5.3-2 一个三阶系统的零、极点分布图

5.3.3 典型环节

任何一个复杂系统, 其运动特性(微分方程或传递函数)均可由一些最简单最基本的运动特性(微分方程或传递函数)组成。这些最基本的运动特性称为典型环节。表 5.3-1 示出了典型环节的名称、微分方程、传递函数和它们的特点。表中  $x(t), y(t)$  分别为各典

表 5.3-1 典型环节

名称	微分方程	传递函数	特点
比例环节	$y(t) = Kx(t)$ K——环节增益	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K$	输出量以一定比例复现输入量
惯性环节	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ T——时间常数 K——惯性环节增益	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>该环节中含有一种类型的储能元件, 并含有耗能元件</li> <li>当输入量突变时, 其输出量不能突变, 输出量的变化滞后于输入量的变化</li> </ul>
振荡环节	$T^2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$ K——环节增益 T——时间常数 $\zeta$ ——阻尼比 $0 < \zeta < 1$	$G(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ 或 $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ $\omega_n = \frac{1}{T}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>该环节含有两种类型的储能元件</li> <li>在过渡过程中, 两种类型的储能元件进行能量交换, 产生振荡</li> </ul>
积分环节	$y(t) = K \int x(t) dt$ K——积分环节增益	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$	输出量比例于输入量的积分
纯微分环节	$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}$ K——环节放大系数	$G(s) = Ks$	<ul style="list-style-type: none"> <li>输出量与输入量的导数成正比</li> <li>在实际的物理系统中, 该环节不独立存在</li> </ul>
一阶微分环节	$y(t) = K \left[ T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right]$ K——环节放大系数 T——时间常数	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K(Ts + 1)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>输出量比例于输入量及其导数之和</li> <li>在实际物理系统中不独立存在</li> </ul>
延时环节 (时滞环节)	$y(t) = Kx(t - \tau)$ $\tau$ ——延迟时间	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = Ke^{-s\tau}$	输出量滞后于输入量时间 $\tau$ , 但其波形相同

5.3.4 动态结构图

控制系统的动态结构图(简称结构图)是将系统的所有元件都用方框表示,在各方框中标明其传递函数,按照信号传递方向把各元件方框依次连接起来的一种图形。这种图形是描述系统各组成元件之间信号传递关系的一种数学图形,所以结构图是一种将系统图形化的数学模型。

(1) 结构图的组成

组成结构图的基本符号有四种,即信号线、方框、加减点(比较点)和引出点。

**信号线** 用带有箭头的直线表示,箭头指向信号传递的方向,线上标明信号的时间函数或象函数,如图 5.3-3(a)所示。

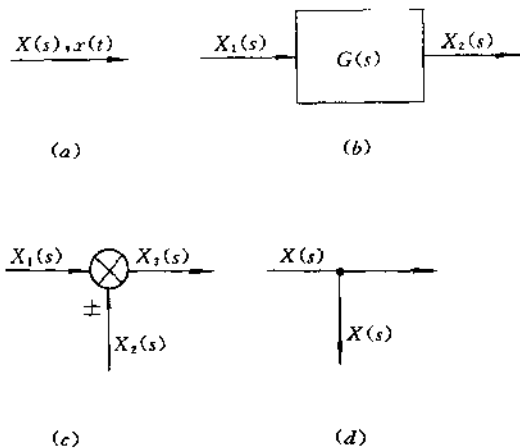


图 5.3-3 结构图使用的符号

**函数方框(简称方框)** 表示对信号进行的数学变换。方框中写入元件或系统的传递函数,如图 5.3-3(b)所示。方框的输出变量等于方框的输入变量与传

递函数的乘积,即  $X_2(s) = G(s)X_1(s)$ 。

**加减点(或称比较点)** 它表示信号线指向加减点的那些信号在此进行相加或相减,箭头旁标注的“+”或“-”表示对此信号相加或相减,有时“+”号省略不写。而离开加减点那个信号线上的信号表示在此相加减的结果。如图 5.3-3(c)中  $X_3(s) = X_1(s) + X_2(s)$ 。

**引出点** 如图 5.3-3(d)所示。它表示同一信号向不同方向传递,从同一点引出的信号在数值上和性质上完全相同。

应用图 5.3-3 所示的 4 种符号,可以把一个复杂系统的信号传递特性用结构图表示出来。

(2) 结构图建立的一般步骤

- 根据系统中各元件所遵从的有关定律和机理列写其微分方程。

- 对各方程两端进行拉氏变换,令初始条件为零,然后写成输出量的象函数等于传递函数乘以输入量的象函数的形式。

- 按照函数方框画法的规定画出各元件的函数方框图。

- 根据信号的传递顺序,依次将各元件的函数方框图连接起来,便得到了系统结构图。

(3) 结构图的等效变换

为了通过结构图求出系统的传递函数,则需要对复杂的结构图进行变换。结构图变换,相当于在结构上进行数学方程的运算。其变换所遵循的原则是:变换前后的数学关系保持不变,即变换前后系统输出量与输入量之间的关系(传递函数)不变。因此结构图的变换是一种等效变换。结构图等效变换法则示于表 5.3-2。

表 5.3-2 结构图等效变换

名称	变换前结构图	变换后结构图
串联变换		



续表

名称	变换前结构图	变换后结构图
并联变换		
加减点后移		
加减点前移		
引出点后移		
引出点前移		
反馈变换		

5.3.5 闭环(反馈)控制系统结构图的一般表示形式及其传递函数

(1) 闭环系统结构图的一般表示形式

一个闭环控制系统结构图的一般表示形式如图 5.3-4 所示。图中  $R(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $N(s)$  分别为系统的输入量、输出量、干扰的象函数

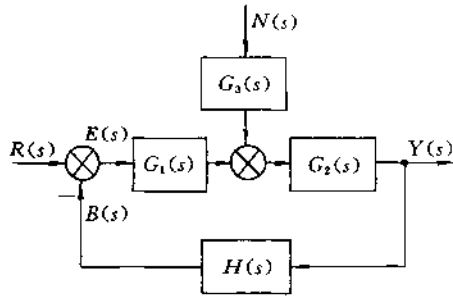


图 5.3-4 闭环(反馈)控制系统结构图

(2) 闭环系统中几个传递函数的定义和它们的表示方法

根据系统分析和系统设计的需要,对于图 5.3-4 的闭环系统,给出以下几个传递函数的定义和它们的表示方法:

**系统的开环传递函数** 开环传递函数定义为当主反馈断开时,主反馈信号的拉氏变换  $B(s)$  与输入量的拉氏变换  $R(s)$  之比。若以  $G(s)$  表示系统的开环传递函数,根据图 5.3-4 则有

$$G(s) = \frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) \quad (5.3-17)$$

式中  $G_1(s) \cdot G_2(s)$  称为系统的前向通路传递函数,  $H(s)$  称为系统反馈通路传递函数。

在不断开反馈情况下,闭环系统的开环传递函数可写成

$$G(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) \quad (5.3-18)$$

**输入信号  $r(t)$  作用下系统的闭环传递函数** 它定义为,令  $N(s) = 0$ , 闭环系统输出量的拉氏变换  $Y(s)$  与输入量的拉氏变换  $R(s)$  之比。若以  $\Phi(s)$  表示这一传递函数,根据图 5.3-4 则有

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (5.3-19)$$

**干扰  $n(t)$  作用下系统的闭环传递函数** 它定义为,令  $R(s) = 0$ , 闭环系统输出量的拉氏变换  $Y(s)$  与

扰动的拉氏变换  $N(s)$  之比。若以  $\Phi_n(s)$  表示这一传递函数,根据图 5.3-4 则有

$$\Phi_n(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (5.3-20)$$

5.4 时域分析法

5.4.1 稳定性分析

(1) 定义

处于平衡工作状态的系统,受到扰动作用后,其输出量偏离原来的平衡工作状态,当扰动取消后,如果系统能以足够的准确度逐渐恢复到原来的平衡状态,则称系统是稳定的,或说具有稳定性的。否则,称系统是不稳定的,或说不具有稳定性的。

稳定性是系统去掉扰动以后,自身的一种恢复能力,所以是系统的一种固有特性,它只取决于系统本身的结构和参数,而与初始条件和外作用无关。

(2) 系统稳定的充分必要条件

系统稳定的充分必要条件是,系统特征方程的根(即闭环传递函数的极点)全部位于  $s$  平面的左半平面。

(3) 劳斯稳定性判据

应用劳斯判据判别稳定性分两步进行:第一步,首先根据系统的特征方程编制一个行列表(称劳斯行列表);第二步,根据劳斯表第一列的元素符号来判别系统的稳定性。

**劳斯行列表的编制** 设系统特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.4-1)$$

当  $a_n > 0$  时,劳斯表按如下方法编制

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
$s^{n-4}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	...
$\vdots$	$\vdots$			
$s^0$	$a_0$			

表中

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

直至其余  $b_i$  值全部等于零为止;

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-3} b_3}{b_1}$$

直至其余  $c_i$  值全部等于零为止;

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

.....

这一过程一直延续到第  $n+1$  行为止。为清楚起见,在行列表左侧第一行标出  $s^n$ , 第二行标出  $s^{n-1}$ , ..., 最后标出  $s^0$ 。表中第一、二行各元素用特征方程的系数直接按表中箭头指向次序排列, 第三行以后的元素由前两行各元素按上面给出的方法递推算出。在计算过程中, 用正数乘以或除以同一行各元素, 不改变稳定性结论。

**劳斯稳定性判据的内容** 系统稳定的充分必要条件是, 劳斯行列表中第一列所有元素均大于零。如果第一列中出现小于零的元素, 系统就不稳定。并且该列中元素符号改变的次数就等于系统特征方程于右半  $s$  平面根的个数。

**5.4.2 单位阶跃响应的暂态性能指标**

由于实验及测量的方便, 工程上常用单位阶跃响应来衡量系统过渡过程(或称暂态过程)的优劣。系统单位阶跃响应可用图 5.4-1 所示特征参数描述, 这几个特征参数称为单位阶跃响应的暂态性能指标, 或称单位阶跃响应性能指标, 它们的定义如下:

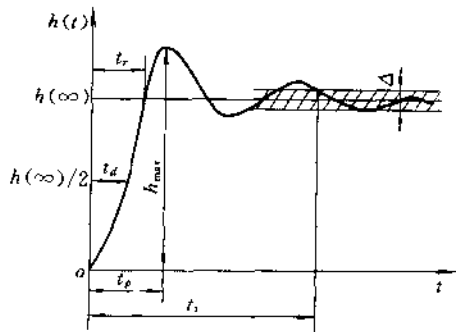


图 5.4-1 具有衰减振荡的单位阶跃响应

**延迟时间  $t_d$**  单位阶跃响应曲线从零到达稳态值  $h(\infty)$  的 50% 时所需的时间。

**上升时间  $t_r$**  单位阶跃响应曲线从零上升到第一

次到达稳态值  $h(\infty)$  时所需的时间。

**峰值时间  $t_p$**  单位阶跃响应曲线从零至超过稳态值第一次达到极大值时所需的时间。

**调节时间(或称过渡过程时间)  $t_s$**  在响应曲线的稳态线上, 用稳态值的百分数(通常取稳态值的  $\pm 5\%$  或  $\pm 2\%$ )作一允许误差带  $\Delta$ , 单位阶跃响应曲线从零达到并保持在这一误差带  $\Delta$  内所需的最小时间称调节时间。

**超调量  $\sigma_p$**  响应曲线的最大峰值与稳态值之差对稳态值之比。常用百分数表示:

$$\sigma_p = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\% \quad (5.4-2)$$

**5.4.3 典型二阶系统的单位阶跃响应**

(1) 典型二阶系统的开环传递函数和闭环传递函数

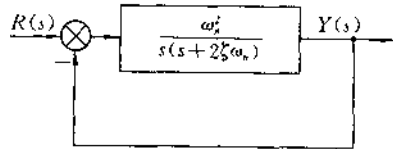


图 5.4-2 典型二阶系统结构图

对于图 5.4-2 所示典型二阶系统, 其开环传递函数  $G(s)$  和闭环传递函数  $\Phi(s)$  分别写成如下标准形式

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (5.4-3)$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.4-4)$$

式中  $\zeta$ ——阻尼比;

$\omega_n$ ——无阻尼自振角频率。

(2) 单位阶跃响应

A. 不同阻尼比的特征根

不同阻尼的特征根见表 5.4-1。

表 5.4-1 不同阻尼比的特征根

名称	阻尼比	特征根(闭环极点)
过阻尼	$\zeta > 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$
临界阻尼	$\zeta = 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$
欠阻尼	$0 < \zeta < 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
无阻尼	$\zeta = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$

B. 单位阶跃响应

不同阻尼比的单位阶跃响应表达式示于表 5.4-2。

表 5.4-2 典型二阶系统的单位阶跃响应表达式

$\zeta$	$h(t), t \geq 0$
$0 < \zeta < 1$	$1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \beta)$ $\beta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$
$\zeta = 1$	$1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}$
$\zeta > 1$	$1 + \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{2(\zeta^2 - \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} - 1)} + \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{2(\zeta^2 + \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1} - 1)}$
$\zeta = 0$	$1 - \cos \omega_n t$

根据表 5.4-2 画出典型二阶系统的单位阶跃响应曲线示于图 5.4-3。

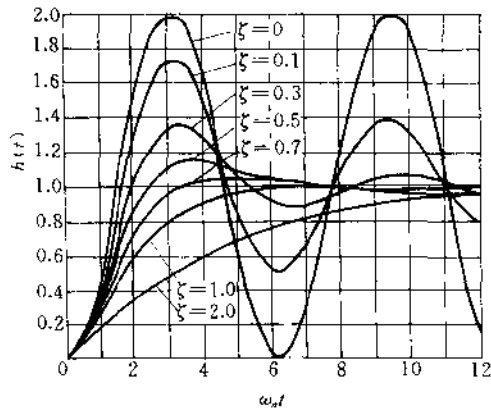


图 5.4-3 典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

图 5.4-3 画出了一些不同  $\zeta$  值的二阶系统单位阶跃响应曲线, 由于横坐标为  $\omega_n t$ , 所以曲线只与  $\zeta$  有关。由图可以看出:

- 对欠阻尼的情况, 阻尼比越小, 则响应速度越快, 同时振荡也越剧烈, 超调量越大。
- 对  $\zeta = 1$  及  $\zeta > 1$  的无超调量系统, 临界阻尼 ( $\zeta = 1$ ) 系统响应最快, 调节时间最短。
- 纵观全部曲线, 阻尼比以选在 0.4 到 0.8 之间为佳, 此时系统具有较短的调节时间, 且响应的超调也不大。但也要考虑有些不允许出现超调, 而又希望响应较快的情况, 如仪表系统中需要采用临界阻尼; 又例如机床进刀控制系统, 超越稳态值的振荡可能导致刀具过深地切入工件, 所以必须取  $\zeta \geq 1$ 。

C. 欠阻尼情况下的性能指标

欠阻尼情况下的性能指标见表 5.4-3。

对表 5.4-3 欠阻尼情况下典型二阶系统性能指标的分析可得出:

- 欠阻尼情况下典型二阶系统的性能指标由系统的阻尼比  $\zeta$  和无阻尼自振角频率  $\omega_n$  两个参数决定。
- 超调量  $\sigma_p$  的大小完全由阻尼比  $\zeta$  决定。  $\zeta$  越小,  $\sigma_p$  越大。当  $\zeta = 0.707$  时,  $\sigma_p < 5\%$ , 系统响应的平稳性令人满意, 且其调节时间  $t_s$  最短, 故常称该阻尼比为最佳阻尼比。
- 三个时间指标  $t_r, t_p, t_s$  与两个系统参数  $\zeta$  和  $\omega_n$  均有关系。当  $\zeta$  一定时, 增加  $\omega_n$ , 三个时间指标均能减小。

5.4.4 高阶系统的单位阶跃响应

(1) 表达式

高阶系统闭环传递函数的一般形式为

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

表 5.4-3 欠阻尼情况下的性能指标

$t_r$	$t_p$	$\sigma_p$	$t_s$ (近似值) $0 < \zeta < 0.9$	
$\frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$ $(\beta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta})$	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$	$e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}} \times 100\%$	$\frac{4}{\zeta \omega_n}$ ( $\Delta = \pm 2\%$ )	$\frac{3}{\zeta \omega_n}$ ( $\Delta = \pm 5\%$ )

对二式进行因式分解, 得

$$\Phi(s) = \frac{K_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

式中  $K_0 = b_m / a_n$ ;

$z_i (i = 1, 2, \dots, m)$  —— 系统闭环传递函数的零点;

$p_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ——系统闭环传递函数的极点。

假定系统所有零点、极点都互不相同。 $n$  个极点中有  $q$  个实数极点,  $r$  对共轭复数极点 ( $q + 2r = n$ )。零点中只有实数零点。则系统单位阶跃响应的拉氏变换为

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \frac{1}{s} \\
 &= \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s - p_j} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^r \frac{B_k (s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}
 \end{aligned} \tag{5.4-5}$$

式中  $A_0, A_j, B_k, C_k$  都是在作部分分式时所确定的常数。

对式(5.4-5)取拉氏反变换, 可得系统的单位阶跃响应表达式如下:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{p_j t} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^r [B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos \sqrt{1 - \zeta_k^2} \omega_{nk} t \\
 &\quad + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin \sqrt{1 - \zeta_k^2} \omega_{nk} t] \tag{5.4-6}
 \end{aligned}$$

(2) 闭环系统零、极点对单位阶跃响应的影响

A. 极点至虚轴的相对距离对过渡过程的影响

对于稳定的系统, 闭环系统极点具有负实部, 其暂态分量随时间  $t$  增大而衰减, 其中远离虚轴的极点所对应的暂态分量衰减很快, 在整个系统到达稳态之前早已消逝, 而那些离虚轴较近的极点所对应的暂态分量衰减很慢, 在整个过渡过程中始终起作用。所以, 过渡过程的主要特征取决于靠近虚轴的极点。经验证明, 某些极点至虚轴的距离大于最靠近虚轴的极点至虚轴的距离 5 倍时, 其对应的暂态分量对过渡过程的影响可以忽略。

B. 零点对过渡过程的影响

一般来说, 零点的存在使系统的过渡过程加快, 上升时间缩短而超调量增大, 零点离虚轴越近, 这种影响越强。如果有一对零极点靠得很近, 它们之间的距离小于该极点至虚轴距离的十分之一时, 称此对零极点为偶极子, 它们产生的总影响可忽略不计。

(3) 主导极点和等效二阶系统

一个高阶系统, 如果存在靠近虚轴的一个实数极

点或一对共轭复数极点, 并且在其附近又无零点, 其它极点或因远离虚轴或为偶极子而可忽略, 则这个或这对极点称为此高阶系统的闭环主导极点, 它决定系统过渡过程的主要特征。由于欠阻尼情况的二阶系统有较好的过渡过程品质, 所以在实际系统中常取主导极点为共轭复数。具有一对共轭复数主导极点的高阶系统可以用其主导极点所对应的二阶系统来近似, 此二阶系统称为原高阶系统的等效二阶系统, 并可通过对等效二阶系统的分析来估计原高阶系统的过渡过程性能指标。

5.4.5 稳态误差

稳态误差是衡量控制系统控制准确性的一种度量, 通常称为稳态性能。

(1) 误差及误差传递函数

A. 误差定义

对于图 5.4-4 所示单位反馈系统, 其误差与偏差相同, 误差定义为

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} r(t) - y(t) \tag{5.4-7}$$

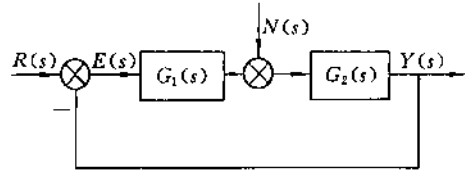
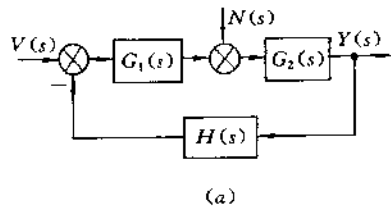
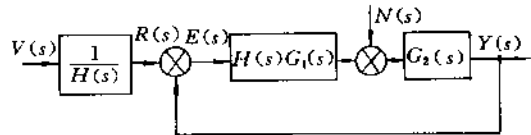


图 5.4-4 单位反馈系统

对于图 5.4-5(a) 所示的非单位反馈系统, 将其等效地变换成图 5.4-5(b) 的单位反馈形式, 其误差定义仍为式(5.4-7)。



(a)



(b)

图 5.4-5 非单位反馈系统及其等效变换

B. 误差传递函数

对于图 5.4-4 所示系统,其误差的拉氏变换为

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}N(s) \quad (5.4-8)$$

**对控制作用的误差传递函数** 令  $N(s) = 0$ , 当初始条件为零时, 误差的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比, 以  $\Phi_r(s)$  表示, 则有

$$\Phi_r(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (5.4-9)$$

**对干扰的误差传递函数** 令  $R(s) = 0$ , 当初始条件为零时, 误差的拉氏变换与干扰的拉氏变换之比, 以  $\Phi_m(s)$  表示, 则有

$$\Phi_m(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (5.4-10)$$

当控制作用和干扰同时存在时, 误差的拉氏变换为

$$E(s) = \Phi_r(s)R(s) + \Phi_m(s)N(s) \quad (5.4-11)$$

(2) 稳态误差定义

对式(5.4-11)两端取拉氏反变换, 则得误差的时域表达式, 即

$$\begin{aligned} e(t) &= \mathcal{L}^{-1}[E(s)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[\Phi_r(s)R(s) + \Phi_m(s)N(s)] \\ &= e_{ts}(t) + e_{ss}(t) \end{aligned}$$

式中  $e_{ts}(t)$ ——误差的暂态分量;

$e_{ss}(t)$ ——误差的稳态分量。

误差的稳态分量称为稳态误差。它表示过渡过程结束以后系统的精度。如果系统是稳定的,  $e_{ss}(t)$  随时间  $t$  的增长而衰减至零, 故有

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (5.4-12)$$

(3) 稳态误差的计算

利用拉氏变换的终值定理可得稳态误差的计算公式如下:

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (5.4-13)$$

使用式(5.4-13)计算稳态误差的条件是:  $sE(s)$  的所有极点在  $s$  平面的左半平面, 这个条件是极限存在的条件; 如果使用无穷极限的概念, 可将条件放宽到允许  $sE(s)$  在坐标原点有极点。

(4) 系统型别

对图 5.4-6 反馈控制系统, 其开环传递函数可写成典型环节串联的形式

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots}{s^v (T_1 s + 1) \cdots (T_2^2 s^2 + 2\zeta_2 T_2 s + 1) \cdots}$$

式中  $K$ ——开环增益;

$v$ ——积分环节的数目(或称无差度)。

对于  $v$  等于 0、1、2 的系统分别称为 0 型、I 型、II 型系统  $v$  越大(即开环传递函数中积分环节个数越多), 系统的稳态精度越高。但  $v$  太大, 可能引起系统不稳定。所以, 实际系统要求  $v \leq 2$ 。

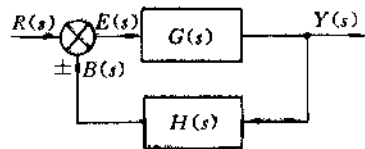


图 5.4-6 反馈控制系统结构图

(5) 静态误差系数

A. 定义

静态位置误差系数  $K_p$

$$K_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) \quad (5.4-14)$$

静态速度误差系数  $K_v$

$$K_v \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \quad (5.4-15)$$

静态加速度误差系数  $K_a$

$$K_a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) \quad (5.4-16)$$

B. 静态误差系数与稳态误差的关系

在表 5.4-4 中, 列出了系统的型别、静态误差系数和系统输入信号的形式与稳态误差之间的关系。利用表 5.4-4 可以直接得出输入信号作用下系统的稳态误差, 而无需再利用终值定理逐步计算。

对使用表 5.4-4 计算稳态误差时的几点说明:

- 系统必须是稳定的, 否则计算稳态误差没有意义。
- 表 5.4-4 中的结论只适用于输入信号  $r(t)$  作用下系统的稳态误差, 不适用于干扰作用下系统的稳态误差。
- 表 5.4-4 中的  $K$  必须是系统开环增益, 即开环传递函数中的各典型环节常数项为 1 时的增益。
- 如果系统输入信号形式比较复杂, 不是表 5.4-4 中给出的阶跃、斜坡、抛物线那样的简单形式, 可将复杂信号分解成表 5.4-4 给出的那样三种简单形式, 然后再利用表 5.4-4 进行计算稳态误差。

表 5.4-4 输入信号作用下的稳态误差

系统型别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t) = Rt$	抛物线输入 $r(t) = \frac{1}{2} Rt^2$
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	位置误差 $e_s = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_v = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_a = \frac{R}{K_a}$
0	$K$	0	0	$\frac{R}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
I	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{R}{K}$	$\infty$
II	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{R}{K}$

## 5.4.6 计算机绘制系统单位阶跃响应曲线程序

## (1) 功能

本程序可在 PC/XT 或其它兼容机的屏幕及打印纸上绘出自动控制系统的单位阶跃响应曲线;绘图同时,可自动给出该响应的性能指标  $t_r, t_p, \sigma_p, t_s$  ( $\Delta = \pm 5\%$ ) 及所使用的时间比例尺  $C$ 。

## (2) 闭环传递函数表达式

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

## (3) 程序使用符号

$M$ ——系统闭环传递函数分子的阶次;

$N$ ——系统闭环传递函数分母的阶次;

$H_1$ ——积分步长;

$C$ ——时间坐标比例尺;

$L_1$ ——屏幕限制;

$T$ ——时间;

$A(N-1)$ ——由  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  构成的数组;

$B(M)$ ——由  $b_0, b_1, \dots, b_m$  构成的数组;

$Y$ ——系统输出;

$t_r$ ——上升时间;

$t_p$ ——峰值时间;

$M_p$ ——超调量,即  $\sigma_p$ ;

$t_s$ ——调节时间( $\Delta = \pm 5\%$ )。

## (4) 使用方法

• 在 1520 行的 DATA 中给出  $M, N, H_1, C$  的数据。 $H_1, C$  的数值可参考例题。

• 在 1525 行的 DATA 中给出  $b_0, b_1, \dots, b_m$  的数据。

• 在 1530 行的 DATA 中给出  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  的数据。

## (5) 注意事项

(A) 要适当地选择积分步长  $H_1$ 。 $H_1$  小则画图慢,  $H_1$  大则画图快,但  $H_1$  太大使精度下降,甚至使计算发散。

(B) 要适当地选择时间比例尺  $C$ 。 $C$  值加大,曲线横向展宽,反之则压缩。

## (6) 例题

例 若系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1.275s + 5.1}{s^4 + 5s^3 + 9.25s^2 + 7.775s + 5.1}$$

试用计算机绘制其单位阶跃响应曲线,并给出性能指标。

[解] ① 给出数据

1520 DATA 1,4,1E-1,1E-3,0.25

1525 DATA 5.1,1.275

1530 DATA 5.1,7.775,9.25,5

② 运行结果示于图 5.4-7。

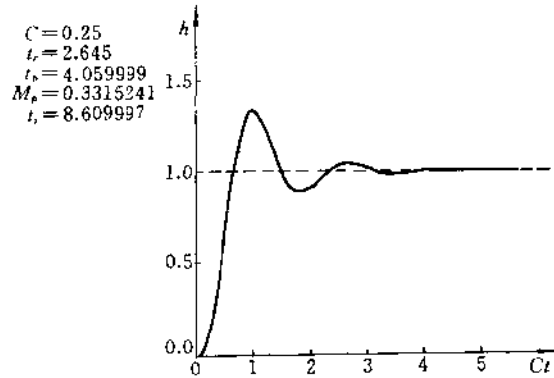


图 5.4-7 例题的单位阶跃响应曲线

## (7) BASIC 参考程序

```

1000 REM UNIT STEP RESPONSE
1005 CLS:KEY OFF:SCREEN 2,0
1010 LINE (150,10)-(150,160)
1015 LINE (150,10)-STEP(4,5)
1020 LINE (150,10)-STEP(-4,5)
1025 LINE (150,40)-(158,40)
1030 LINE (150,80)-(158,80)
1035 LINE (150,120)-(158,120)
1040 FOR I=1 TO 30
1045 PSET (150+15*I,80)
1050 NEXT I
1055 LOCATE 2,15:PRINT "h"
1060 LOCATE 5,15:PRINT "1.5"
1065 LOCATE 10,15:PRINT "1.0"
1070 LOCATE 15,15:PRINT "0.5"
1075 LOCATE 20,15:PRINT "0.0"
1080 LINE (150,160)-(600,160)
1085 LINE (600,160)-STEP(-10,-2)
1090 LINE (600,160)-STEP(-10,2)
1095 FOR I=1 TO 5
1100 LINE (150+72*I,155)-(150+72*I,160)
1105 NEXT I
1110 LOCATE 22,19:PRINT "0"
1115 LOCATE 22,28:PRINT "1"
1120 LOCATE 22,37:PRINT "2"
1125 LOCATE 22,46:PRINT "3"
1130 LOCATE 22,55:PRINT "4"
1135 LOCATE 22,64:PRINT "5"
1140 LOCATE 22,73:PRINT "Ct"
1145 LOCATE 2,1
1150 READ C1,C2,L1,T
1155 READ M,N,H1,E,C
1160 DIM X(N),X1(N),H(4),K(N,4)
1165 PRINT "C=";C
1170 FOR I=0 TO M
1175 READ B(I)
1180 NEXT I
1185 FOR I=0 TO N-1
1190 READ A(I)
1195 NEXT I
1200 FOR I=1 TO N
1205 X(I)=0
1210 NEXT I
1215 FOR I=0 TO M
1220 Y(0)=B(I)*X(I+1)
1225 NEXT I
1230 XS=150+C1*C*T
1235 YS=160-C2*Y(0)
1240 H=H1:L=0:P=0:MP=0:TR=0
1245 H(1)=H/2:H(2)=H:H(3)=H:H(4)=H/2
1250 J=1
1255 GOSUB 1475
1260 FOR I=1 TO N
1265 X(I)=X(I)+H(J)*K(I,J)/3
1270 NEXT I
1275 J=J+1

```



```

1280 IF J <= 4 THEN 1255
1285 T = T + H : L = L + 1 : P = P + 1
1290 FOR I = 1 TO N
1295 X1(I) = X(I)
1300 NEXT I
1305 IF P < 2 THEN 1315
1310 P = 2
1315 Y(P) = 0
1320 FOR I = 0 TO M
1325 Y(P) = Y(P) + B(I) * X(I + 1)
1330 NEXT I
1335 Y2 = Y(P) - B(0)/A(0) : Y(4) = ABS(Y2) . 05
1340 Y2 = Y(P) - B(0)/A(0) : Y(4) = ABS(Y2) - .05
1345 IF TR < > 0 THEN 1375
1350 IF ABS(Y2) > .1 THEN 1375
1355 IF Y1 * Y2 > 0 THEN 1370
1360 TR = T - .5 * H
1365 PRINT "tr=" ; TR
1370 H = .1 * H1 : GOTO 1380
1375 H = H1
1380 IF P < 2 THEN 1425
1385 IF MP < > 0 THEN 1415
1390 IF Y(2) > Y(1) THEN 1415
1395 IF Y(1) < = Y(0) THEN 1415
1400 MP = Y2
1405 PRINT "tp=" ; T
1410 PRINT "mp=" ; MP
1415 IF Y3 * Y4 > 0 THEN 1425
1420 TS = T - .5 * H
1425 IF (L/3 - INT(L/3)) < > 0 THEN 1450
1430 X6 = 150 + C1 * C * T : Y6 = 160 - C2 * Y(P)
1435 LINE(X5, Y5) - (X6, Y6)
1440 IF X6 > L1 THEN 1535
1445 X5 = X6 : Y5 = Y6
1450 IF P = 1 THEN 1465
1455 Y(0) = Y(1) : Y(1) = Y(2) : Y1 = Y2 : Y3 = Y4
1460 GOTO 1470
1465 Y(0) = Y(1) : Y3 = Y4
1470 GOTO 1245
1475 FOR I = 1 TO N - 1
1480 K(I, J) = X1(I + 1)
1485 NEXT I
1490 K(N, J) = 1
1495 FOR I = 1 TO N
1500 K(N, J) = K(N, J) - A(I - 1) * X1(I)
1505 NEXT I
1510 RETURN
1515 DATA 72, 80, 550, 0
1520 DATA
1525 DATA
1530 DATA
1535 PRINT "ts=" ; TS
1540 END

```

## 5.5 频域分析法

### 5.5.1 频率特性

#### (1) 频率特性定义

若线性定常稳定系统的输入信号为正弦函数,则稳态时其输出也是同频率的正弦函数,但其振幅及相位与输入信号不同,而且是输入信号频率的函数。输入及输出信号分别表示为

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \sin \omega t \\
 y(t) &= B \sin(\omega t - \varphi)
 \end{aligned}$$

定义:

• 振幅比  $M(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} B/A$ ,  $M(\omega)$  随频率的变化关系称为系统的振幅频率特性。简称为幅频特性。

• 相位差  $\varphi(\omega)$  随频率的变化关系称为系统的相位频率特性。简称为相频特性。

• 以  $M(\omega)$  为模、 $\varphi(\omega)$  为幅角所构成的复数  $M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  包括幅频特性和相频特性的性质,称为系统的频率特性。

#### (2) 频率特性与传递函数的关系

$$M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) \quad (5.5-1)$$

因此,频率特性用  $G(j\omega)$  表示,幅频特性用  $|G(j\omega)|$  表示,相频特性用  $\angle G(j\omega)$  (或  $\varphi(\omega)$ ) 表示。

#### (3) 频域分析法的特点

• 该方法是通过分析系统对不同频率谐波输入的稳态响应去识别系统的稳定性、稳态误差和暂态性能。

• 频域分析法可用开环系统的频率特性来分析闭环系统的性能,同时又能方便地分析系统某个(或某几个)参数变化对系统性能的影响。

• 既然频率特性表现在不同  $\omega$  的正弦稳态响应上,那么,频率特性就可通过实验获得。

• 频域法基本上是一种图解方法。对频域法的作

图,目前已有现成的计算机软件做辅助,可用计算机方便地绘制,因此为其应用带来很大方便。

### 5.5.2 频率特性的各种数学表达式

频率特性是一个复数,可以有以下三种表示式:

代数式

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

极坐标式

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \angle G(j\omega) \\ &= A(\omega) \angle \varphi(\omega) \end{aligned}$$

指数式

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} \\ &= A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

在以上各表示式中,通常称

$U(\omega)$ 为实频特性;

$V(\omega)$ 为虚频特性;

$A(\omega) = |G(j\omega)|$ 为幅频特性;

$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 为相频特性。

参见图 5.5-1,显然可得如下关系

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

$$V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

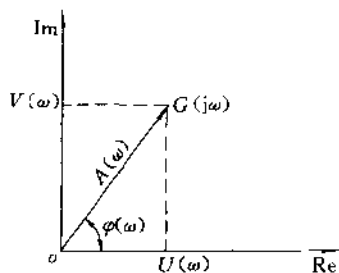


图 5.5-1 复平面

### 5.5.3 频率特性的图示方法

工程上用频率特性分析与设计系统时,通常不是直接利用频率特性的数学表达式,而是把频率特性绘制成一些曲线,从频率特性曲线出发进行研究。表 5.5-1 列出了最常用的两种频率特性曲线的名称,图形常用名及其采用的坐标系。

#### (1) 幅相频率特性曲线——极坐标图

当频率  $\omega$  从零至无穷大变化时,  $G(j\omega)$  在复平面上描绘出一条曲线,这条曲线上的任一点同时表示出

表 5.5-1 常用频率特性曲线名称及其坐标系

名称	图形常用名	坐标系
幅相频率特性曲线	极坐标图或称奈奎斯特图(简称奈氏图)	极坐标
对数幅频特性曲线 对数相频特性曲线	对数坐标图或称伯德图	半对数坐标

某一频率时频率特性的幅值和相角,如图 5.5-2 所示。这条曲线称为幅相频率特性曲线或称奈氏曲线。该曲线连同坐标一起称为极坐标图。规定极坐标的实轴正方向为相角的零度线,逆时针转过的角度为正角度,顺时针转过的角度为负角度。

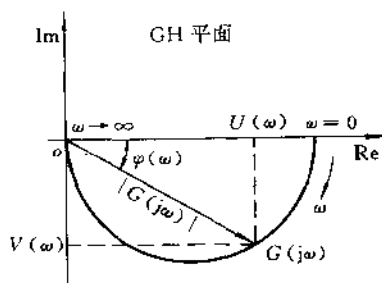


图 5.5-2 幅相频率特性曲线

绘制幅相频率特性曲线有两种方法:第一种方法是对每一个频率  $\omega$  值计算幅值  $|G(j\omega)|$  和相角  $\varphi(\omega)$ ;然后将这些点连成光滑曲线;第二种方法是对每一个  $\omega$  值计算其  $U(\omega)$  和  $V(\omega)$ ,然后逐点连接描绘成光滑的曲线。

#### (2) 对数频率特性曲线——对数坐标图

对数坐标图也称伯德图,它是在一张图上把幅频特性和相频特性分别画成两条曲线,这两条曲线相应称为对数幅频特性和对数相频特性,统称对数频率特性。

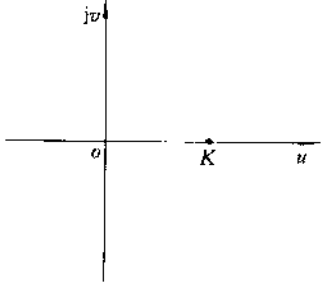
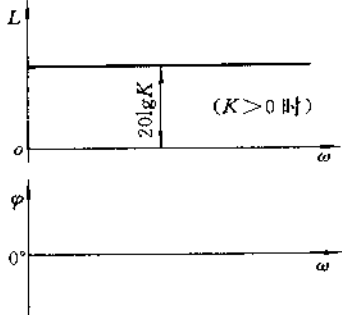
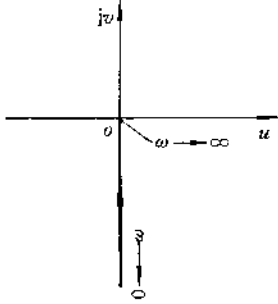
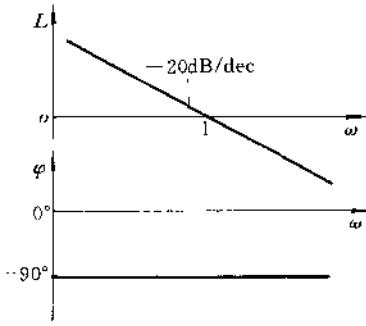
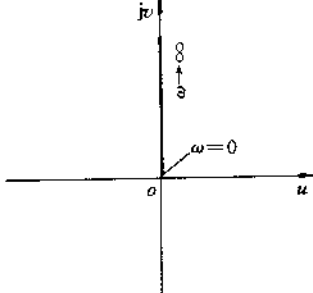
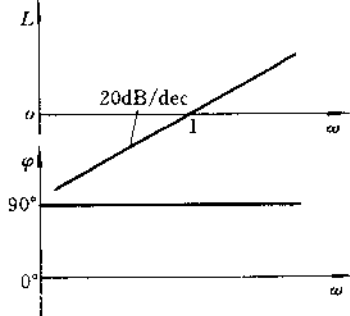
对数频率特性的横坐标轴按  $\lg \omega$  均匀分度,而经常标写的还是频率  $\omega$  的数值。这样,在横坐标上  $\omega$  每变化 10 倍的距离均相等,这个距离的长度称为十倍频程,用“dec”表示;在横坐标上  $\omega$  每变化 1 倍的距离也相等,这个长度称为倍频程,用“oct”表示。对数幅频特性的纵坐标按  $20 \lg |G(j\omega)|$  均匀分度,其单位是分贝(dB),并用符号  $L(\omega)$  表示;对数相频特性的纵坐标按度或弧度均匀分度,并用符号  $\varphi(\omega)$  表示。

### 5.5.4 典型环节的频率特性

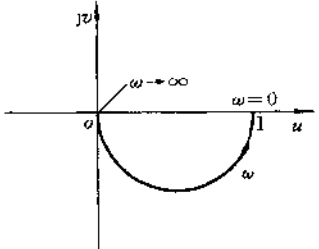
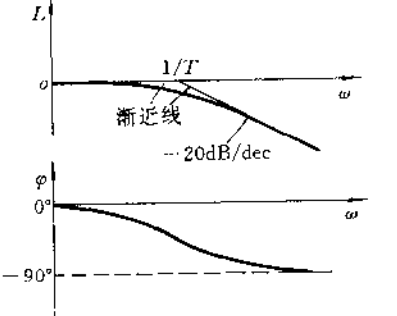
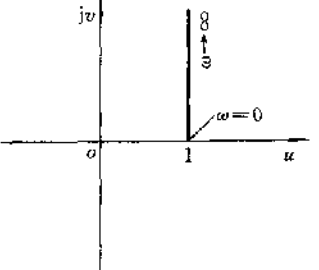
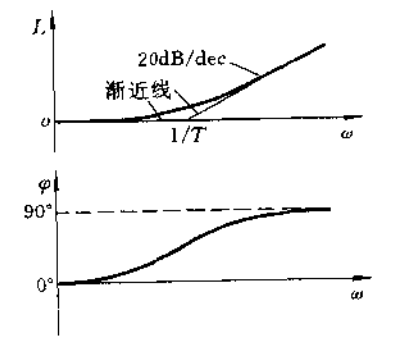
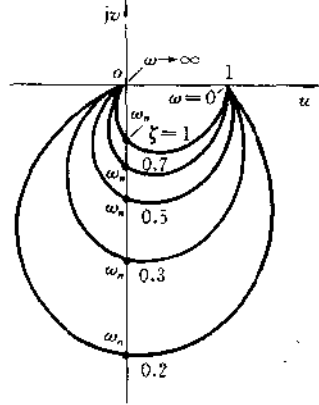
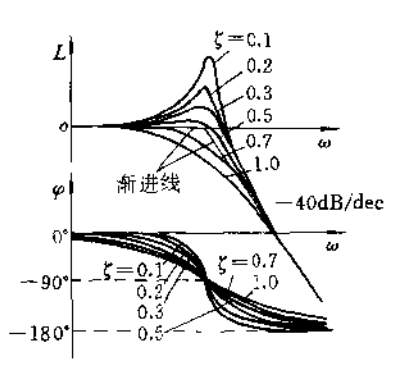
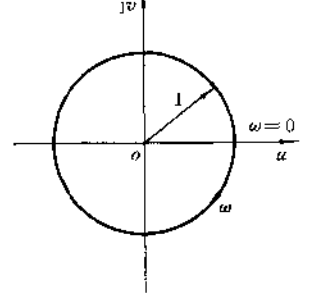
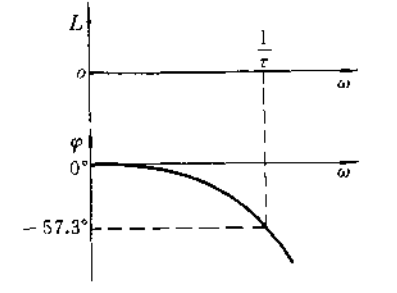
关于典型环节的频率特性和它们的极坐标图(奈

氏图)、对数坐标图(伯德图)见表 5.5 2。

表 5.5-2 典型环节的频率特性

名称及频率特性	奈氏图	伯德图
<p>比例环节</p> $G(j\omega) = K$ $ G(j\omega)  = K$ $\varphi(\omega) = 0^\circ$		
<p>积分环节</p> $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ $ G(j\omega)  = \frac{1}{\omega}$ $\varphi(\omega) = -90^\circ$		
<p>纯微分环节</p> $G(j\omega) = j\omega$ $ G(j\omega)  = \omega$ $\varphi(\omega) = 90^\circ$		

续表

名称及频率特性	奈氏图	伯德图
<p>惯性环节</p> $G(j\omega) = \frac{1}{jT\omega + 1}$ $ G(j\omega)  = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$ $\varphi(\omega) = -\arctan T\omega$		
<p>一阶微分环节</p> $G(j\omega) = jT\omega + 1$ $ G(j\omega)  = \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$ $\varphi(\omega) = \arctan T\omega$		
<p>振荡环节</p> $G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$ $ G(j\omega)  = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$		
<p>延迟环节</p> $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$ $ G(j\omega)  = 1$ $\varphi(\omega) = -\tau\omega \text{ (弧度)}$ $= -57.3\tau\omega \text{ (度)}$		

5.5.5 系统开环频率特性的特点

对一般的线性定常系统其开环系统是由典型环节组成,系统开环频率特性的特点如下:

(1) 开环奈氏图的特点

A. 当  $\omega \rightarrow 0$  时的低频段

当  $\omega \rightarrow 0$  时,开环奈氏图的特征主要取决于系统的型别,如图 5.5-3 所示。对 0 型系统的开环奈氏曲线其起点由开环增益  $K$  决定,即起始于实轴上的  $(K, j0)$  点;对 I 型系统奈氏曲线起始于相角为  $-90^\circ$  的无穷远处;对 II 型系统奈氏曲线起始于相角为  $-180^\circ$  的无穷远处。

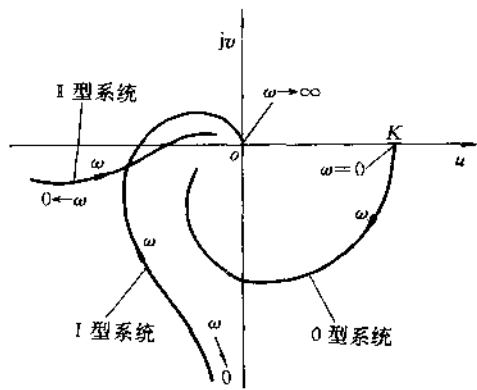


图 5.5-3  $\omega \rightarrow 0$  附近的奈氏曲线特征

B 当  $\omega \rightarrow \infty$  时的高频段

设系统开环传递函数分子最高阶次为  $m$ ,分母最高阶次为  $n$ 。当  $n > m$  时,开环奈氏曲线在  $\omega \rightarrow \infty$  处的特征如图 5.5-4 所示。在该图中给出了  $n - m = 1, 2, 3$  时的特征。

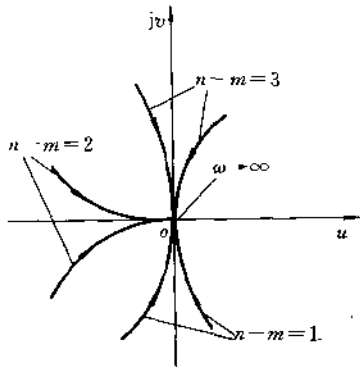


图 5.5-4  $\omega \rightarrow \infty$  附近的奈氏曲线特征

(2) 伯德图的特点

- 如果  $\omega_1$  为系统开环对数幅频特性的最低转折角频率,  $\nu$  为其积分环节的个数, 则当  $\omega \ll \omega_1$  时,  $L(\omega)$  的斜率为  $-20\nu$  dB/dec。

- 如果  $\omega_2$  为系统开环对数幅频特性的最高转折角频率, 则当  $\omega \gg \omega_2$  时,  $L(\omega)$  的斜率为  $-20(n - m)$  dB/dec。其中  $m$  和  $n$  分别为系统开环传递函数分子和分母的最高次数。

- $L(\omega)$  的低频延长线在  $\omega = 1$  rad/s 处的纵坐标等于  $20\lg K$  dB。

图 5.5-5 所示的伯德图, 其  $\nu = 2, n - m = 2, 20\lg K = 5$  dB。

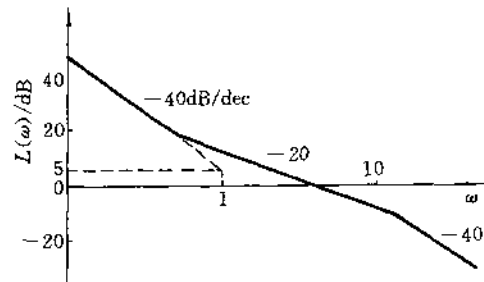


图 5.5-5 伯德图

(3) 最小相位系统

(A) 定义——在  $s$  平面的右半平面, 如果没有系统开环传递函数的极点和零点, 称此系统为最小相位系统; 相反, 如果在  $s$  平面的右半平面系统有开环传递函数的极点或(和)零点; 或者系统开环传递函数中含有延迟环节, 则称之为非最小相位系统。

(B) 最小相位系统的对数幅频特性与对数相频特性具有一一对应关系。即对于给定的对数幅频特性只有唯一的对数相频特性与之对应。而非最小相位系统, 对于给定的对数幅频特性, 与之对应的对数相频特性却不是唯一的。由于最小相位系统具有上述性质, 因而利用伯德图进行系统分析时, 对于最小相位系统往往只画出它的对数幅频特性曲线就够了。

5.5.6 用系统开环频率特性分析系统稳定性

(1) 奈奎斯特稳定判据

奈奎斯特稳定判据的特点是用系统的开环幅相频

率特性来判别闭环系统的稳定性。该判据为：一个反馈系统其闭环传递函数在右半  $s$  平面的极点数  $Z$ ，可以根据其开环传递函数在右半  $s$  平面的极点数  $P$  和当  $\omega$  由零变到无穷大时的开环幅相频率特性曲线包围  $(-1, j0)$  点的圈数  $N$  (沿  $\omega$  增加方向，逆时针包围为正) 来决定，即

$$Z = P - 2N \quad (5.5-2)$$

$Z$  等于零，则闭环系统稳定； $Z$  不等于零，闭环系统不稳定。 $Z$  的值就是闭环传递函数在右半  $s$  平面极点的个数。

**例 1** 若反馈系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{20}{(3s+1)(2s+1)(s+1)}$$

试用奈氏判据判别其闭环系统的稳定性。

[解] 该系统的奈氏图示于图 5.5-6。由图可知，奈氏曲线通过实轴的  $-2$  处，并顺时针包围  $(-1, j0)$  点一圈，即  $N = -1$ ，又由开环传递函数知其所有开环极点均为负实数，故  $P = 0$ 。根据式(5.5-2)有： $Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$ 。因此，闭环系统不稳定，且闭环不稳定极点个数为 2。

(2) 系统开环传递函数中含有积分环节时奈氏判据的应用

当系统开环传递函数含有积分环节时，就意味着开环传递函数有在原点的极点，这时在应用奈氏稳定判据时应做如下处理：

(A) 把开环传递函数在原点的极点视为  $s$  平面左半平面的极点；

(B) 因为把开环传递函数在原点的极点视为左极点，则需对开环奈氏图做出补充，以图 5.5-7(a)、(b) 分别为系统开环传递函数有一个和两个积分环节的情况做例子，它们的奈氏曲线需从  $\omega = 0^+$  开始，以  $R \rightarrow \infty$  为半径，沿逆时针方向补画  $\nu \frac{\pi}{2}$  角度的圆弧 ( $\nu$  为开环传递函数中积分环节的个数)，如图 5.5-7(a)、(b) 中的虚线部分，虚线圆弧在  $\omega = 0$  处与实轴相交。

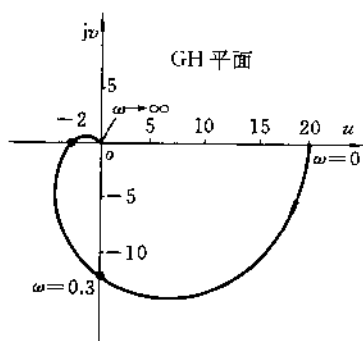


图 5.5-6 例 1 的奈氏图

当做完上述处理后，再应用奈氏判据判别系统稳定性。

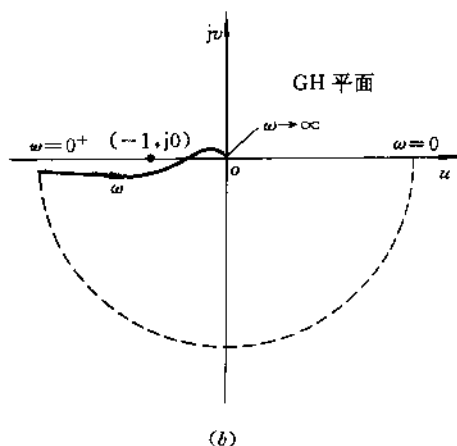
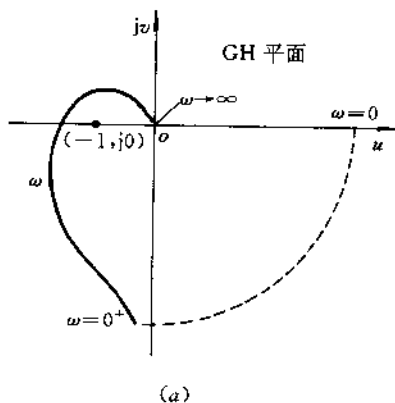


图 5.5-7 含有积分环节的系统奈氏图

对图 5.5-7(a) 对应的系统，若  $P = 0$ ，从图中看出，其奈氏曲线包围  $(-1, j0)$  点的圈数  $N = -1$ ，这样

$Z = 0 - 2 \times (-1) = 2$ ，故其闭环系统不稳定；对图 5.5-7(b) 对应的系统，若  $P = 0$ ，其奈氏曲线包围  $(-1,$

$j0$ 点的函数  $N=0$ ,  $Z=0-2\times 0=0$ , 故其闭环系统是稳定的。

(3) 对数频率特性的稳定性判据

A. 穿越

在  $L(\omega) > 0$  的频率区间,  $\varphi(\omega)$  曲线通过  $-\pi$  线称为穿越。沿  $\omega$  增加方向,  $\varphi(\omega)$  曲线自下向上通过  $-\pi$  线 ( $\varphi$  角增加) 为正穿越, 反之,  $\varphi(\omega)$  曲线自上向下通过  $-\pi$  线 ( $\varphi$  角减小) 为负穿越。

B. 对数频率特性的稳定性判据

一个反馈系统, 其闭环传递函数在右半  $s$  平面的极点数为  $Z$ , 可以根据开环传递函数在右半  $s$  平面的极点数和开环对数幅频特性为正值的所有频率范围内, 对数相频特性的正、负穿越数之差  $N$  来确定, 即

$$Z = P - 2N$$

当  $Z$  等于零时, 闭环系统是稳定的。

例 2 若一个反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{500(s+1)(0.5s+1)}{s(10s+1)(5s+1)(0.1s+1)(0.02s+1)}$$

试用对数频率特性的稳定性判据判别其闭环系统的稳定性。

[解] 根据题意画出的系统开环对数频率特性如图 5.5-8。由图可知, 在  $\omega < 5\text{rad/s}$  区间内  $L(\omega) > 0\text{dB}$ , 在此区间内  $\varphi(\omega)$  曲线在  $\omega = 0.18\text{rad/s}$  处自上向下穿过  $-180^\circ$  线, 有负穿越一次, 又在  $\omega = 1.3\text{rad/s}$  处自下向上穿过  $-180^\circ$  线, 有正穿越一次, 故  $N = 1 - 1 = 0$ ; 又由题给出的开环传递函数可知  $P = 0$ 。因此  $Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0$ , 所以该闭环系统是稳定的。

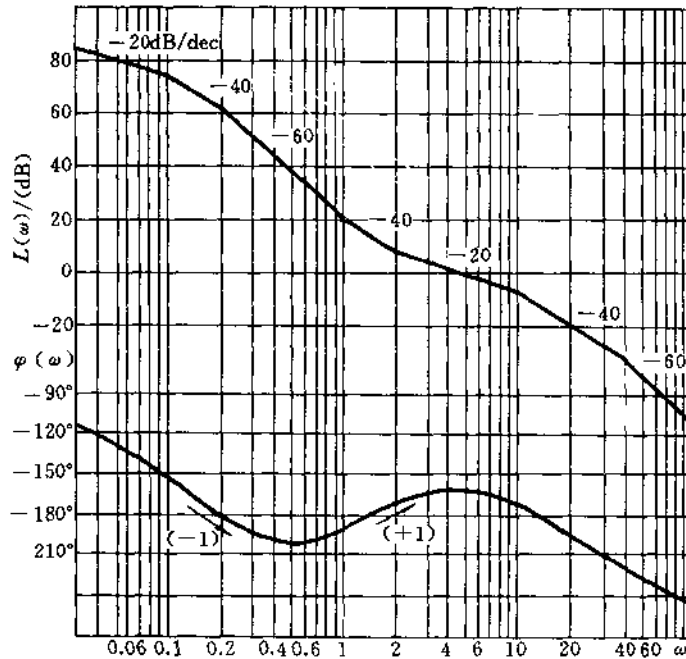


图 5.5-8 例 2 的伯德图

### 5.5.7 稳定裕量

一个反馈控制系统不仅要绝对稳定, 而且对其稳定程度(即相对稳定性)也有一定要求, 衡量其稳定程度的指标是: 幅值裕量  $K_g$  和相角裕量  $\gamma$ 。这两个稳定裕量指标是根据系统开环幅相频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  和对数频率特性  $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|$ ,  $\varphi(\omega)$  来定义的。如图 5.5-9 和图 5.5-10。

(1) 幅值裕量  $K_g$

对图 5.5-9, 若在  $\omega = \omega_1$  时,  $G(j\omega)H(j\omega)$  曲线与负实轴相交, 定义

$$K_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|} \quad (5.5-3)$$

$K_g$  称为幅值裕量。它的物理意义是: 如果系统的开环增益放大  $K_g$  倍, 则  $G(j\omega)H(j\omega)$  曲线将通过  $(-1, j0)$  点, 此时闭环系统处于临界稳定状态。

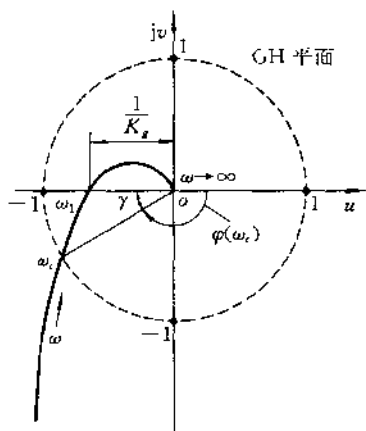


图 5.5-9 奈氏图: 表示的幅值裕量  
和相角裕量

(2) 相角裕量  $\gamma$

对图 5.5-9, 若在  $\omega = \omega_c$  时,  $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$ , 定义

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} 180^\circ + \varphi(\omega_c) \quad (5.5-4)$$

$\gamma$  称相角裕量。 $\omega_c$  称为穿越频率(或称截止频率)。相角裕量的物理意义是: 当  $\varphi(\omega_c)$  再滞后  $\gamma$  角时, 系统处于临界稳定状态。幅值裕量和相角裕量在伯德图上的表示如图 5.5-10 所示。在该图上, 幅值裕量的分贝值为

$$Kg(\text{dB}) = 20 \lg \frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|} = -L(\omega_1) \quad (5.5-5)$$

相角裕量如图中的标注。

一个稳定的系统, 其相对稳定性必须既满足幅值裕量要求又满足相角裕量的要求。

5.5.8 二阶系统频率特性与过渡过程的关系

(1) 闭环幅频特性与过渡过程的关系

A. 闭环频域指标

若系统闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1} \quad (5.5-6)$$

闭环幅频特性为

$$M(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (5.5-7)$$

当  $0 < \zeta < 1$  时,  $M(\omega)$  曲线的一般形状示于图 5.5-

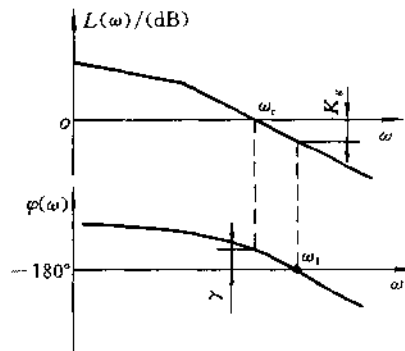


图 5.5-10 在伯德图上表示的幅值裕量  
和相角裕量

11。对照图 5.5-11 给出表示  $M(\omega)$  形状的特征参数如下:

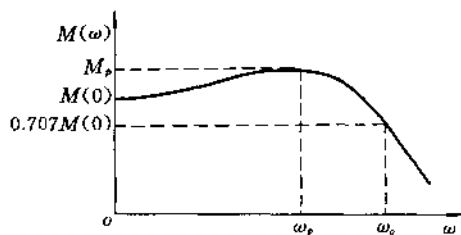


图 5.5-11 二阶系统的闭环幅频特性

- 闭环幅频特性峰值  $M_p$ : 它是闭环系统幅频特性的最大值。

- 峰值频率  $\omega_p$ : 是闭环系统幅频特性出现峰值时的频率值。

- 带宽和带宽频率: 若  $\omega$  从零增加到  $\omega_0$  时,  $M(\omega_0)$  下降为  $M(0)$  的  $1/\sqrt{2}$  倍, 即

$$M(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(0) \quad (5.5-8)$$

则零至  $\omega_0$  的频率范围称为系统的带宽(或称通频带),  $\omega_0$  称带宽频率。

$M_p, \omega_p, \omega_0$  表示了闭环系统幅频特性的主要特征, 它们和过渡过程关系最密切, 通常把这三个参数称为过渡过程的闭环频域指标。

B.  $M_p, \omega_p, \omega_0$  与  $\zeta, \omega_n$  之间的关系

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5.5-9)$$



$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.5-10)$$

$$\omega_0 = \omega_n [\sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} - (2\zeta^2 - 1)]^{1/2} \quad (5.5-11)$$

C. 时域指标与频域指标的关系

对式(5.5-10)和表 5.4-3 给出的超调量表示式分别给以不同的  $\zeta$  值, 则得一组  $M_p$  和  $\sigma_p$ , 列于表 5.5-3。

根据表 5.5-3 中的数据, 画出  $\sigma_p$  随  $M_p$  变化的关系曲线示于图 5.5-12。曲线表明:  $M_p$  增大,  $\sigma_p$  也随之增大。如果给定  $M_p$ , 可根据曲线查出  $\sigma_p$  的数值, 例如  $M_p = 1.36$ , 对应  $\sigma_p = 25.3\%$ 。

对于式(5.5-9)和式(5.5-11)分别给以不同的  $\zeta$  值, 计算  $\omega_p/\omega_n$  和  $\omega_0/\omega_n$  的数值, 列于表 5.5-4。

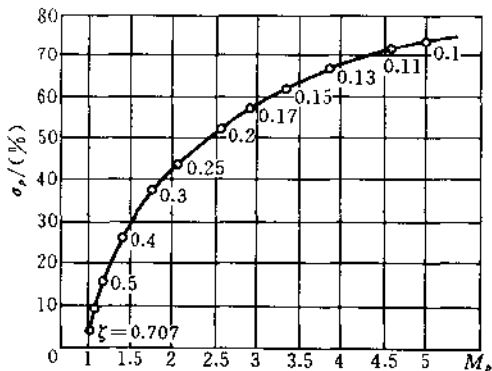


图 5.5-12  $\sigma_p$  与  $M_p$  之间的关系曲线

表 5.5-3 二阶系统  $\zeta, M_p, \sigma_p$  的对应值

$\zeta$	0	0.1	0.11	0.13	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.707
$M_p$	$\infty$	5.03	4.57	3.88	3.37	2.55	2.07	1.747	1.36	1.15	1.04	1
$\sigma_p(\%)$	100	72.9	70.6	66.2	62.1	52.7	44.4	37.2	25.3	16.3	9.5	4.32

表 5.5-4 二阶系统  $\zeta$  和  $\omega_p/\omega_n, \omega_0/\omega_n$  的对应值

$\zeta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.707	0.8	0.9	1
$\omega_p/\omega_n$	1	0.99	0.96	0.93	0.83	0.707	0.53	0			
$\omega_0/\omega_n$	1.55	1.54	1.51	1.45	1.37	1.27	1.15	1	0.87	0.75	0.64

根据表 5.5-4 的数据, 画出  $\omega_p/\omega_n, \omega_0/\omega_n$  随  $\zeta$  变化的曲线示于图 5.5-13。

从图 5.5-13 可以看出:

• 当  $\zeta$  比较小时, 如  $\zeta < 0.4$ , 可视为  $\omega_p/\omega_n \approx 1$ , 即  $\omega_p \approx \omega_n$ 。

• 当  $\zeta = 0.707$  时,  $\omega_0/\omega_n = 1$ , 即  $\omega_0 = \omega_n$ ; 在  $\zeta = 0.707$  附近, 如  $0.5 \leq \zeta \leq 0.8$  区间, 可视为  $\omega_0 \approx \omega_n$ 。

由上面特点可知, 在计算时域指标  $t_r$  和  $t_s$  时, 在  $\zeta < 0.4$  范围内, 可用频域的  $\omega_p$  近似代替时域的  $\omega_n$ ; 在  $0.5 \leq \zeta \leq 0.8$  范围内, 可用频域的  $\omega_0$  近似代替时域的  $\omega_n$ 。一般希望闭环系统工作在  $\zeta = 0.707$  附近, 所以用  $\omega_0$  代替  $\omega_n$  比用  $\omega_p$  代替  $\omega_n$  更准确些。

(2) 开环频率特性与过渡过程的关系

A. 开环频域指标

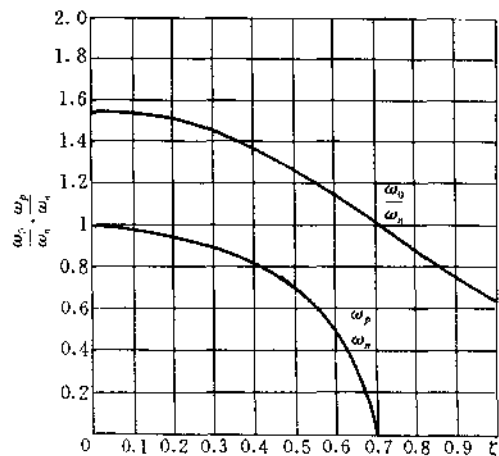


图 5.5-13  $\omega_p/\omega_n, \omega_0/\omega_n$  与  $\zeta$  的关系曲线

在分析闭环系统动态特性时,常用开环频率特性的两个特征量,即截止频率  $\omega_c$  和相角裕量  $\gamma$  来表征系统的过渡过程特征,并称其为开环频域指标。

B.  $\gamma, \omega_c$  与  $\zeta, \omega_n$  的关系

$$\gamma = \arctg \frac{2\zeta}{(\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2)^{1/2}} \quad (5.5-12)$$

$$\omega_c = \omega_n = (\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2)^{1/2} \quad (5.5-13)$$

C. 过渡过程时域指标和开环频域指标的关系

$\sigma_p$  与  $\gamma$  之间的关系 根据式(5.5-12)和表 5.4-3 中  $\sigma_p$  的表达式计算出不同  $\zeta$  值的  $\gamma$  和  $\sigma_p$ , 计算结果列于表 5.5-5。

表 5.5-6  $\gamma, \sigma_p$  与  $\zeta$  的对应值

$\zeta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.707	0.8	0.9	1
$\gamma$ (度)	0	11.42	22.60	33.25	43.10	51.80	59.20	65.5	69.86	73.50	76.35
$\sigma_p$ (%)	100	72.9	52.7	37.2	25.3	16.3	9.5	4.32	1.5	0.15	0

根据表 5.5-5 给出以  $\zeta$  为参变量  $\sigma_p$  随  $\gamma$  的变化曲线示于图 5.5-14。如果知道系统的相角裕量  $\gamma$ , 可从图 5.5-14 所示曲线查出相应的  $\sigma_p$  值。例如,  $\gamma = 44^\circ$ , 可查得  $\sigma_p = 25.4\%$ 。

$t_s$  与  $\omega_c$  的关系 典型二阶系统的调节时间 ( $\Delta = \pm 5\%$ ) 为

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

将式(5.5-13)代入上式,得

$$t_s\omega_c = \frac{3}{\zeta}(\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2)^{1/2} \quad (5.5-14)$$

由式(5.5-12)和式(5.5-14)可得

$\omega_c$  越大,系统的调节时间越短。

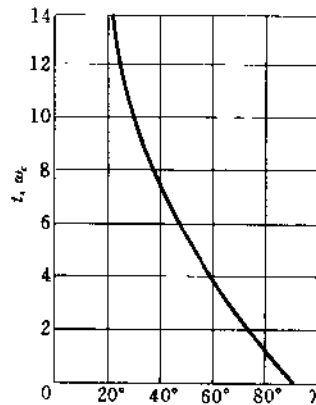


图 5.5-15 二阶系统的  $t_s\omega_c - \gamma$  曲线

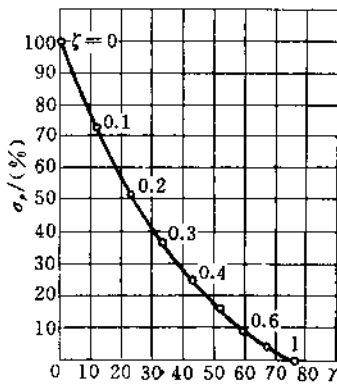


图 5.5-14  $\sigma_p - \gamma$  关系曲线

$$t_s\omega_c = \frac{6}{\text{tg}\gamma} \quad (5.5-15)$$

图 5.5-15 给出了  $t_s\omega_c$  与  $\gamma$  的关系曲线。如果系统的相角裕量  $\gamma$ , 即  $\sigma_p$  已经给定, 则  $t_s$  与  $\omega_c$  成反比。

### 5.5.9 高阶系统的频域指标与时域指标之间关系的估计

高阶系统的频域指标与二阶系统一样,其闭环频域指标为  $M_p, \omega_0$ ;其开环频域指标为  $\gamma, \omega_c$ 。如果高阶系统存在一对闭环主导极点,可以把它化成等效二阶系统。因此,当满足等效二阶系统条件时,可以把二阶系统的频域指标与时域指标之间的关系推广到高阶系统,具体做法如下:

(A) 若已知高阶系统的闭环频域指标  $M_p$  和  $\omega_0$ , 则可通过表 5.5-3 中的  $M_p$  查出对应的等效二阶系统的阻尼比  $\zeta$ , 并同时可查得其对应的时域指标  $\sigma_p$ ; 再通过表 5.5-4 或图 5.5-13, 根据  $\omega_0$  及已得的  $\zeta$  值查出等效二阶系统的无阻尼自然频率  $\omega_n$ , 此时即可根据表 5.4-3 计算时域指标的  $t_r, t_s$ 。

(B) 若已知高阶系统的开环频域指标  $\gamma$  和  $\omega_c$ , 则可通过表 5.5-5 根据  $\gamma$  值查出等效二阶系统的阻尼比  $\zeta$ , 并同时可查得其对应的时域指标  $\sigma_p$ ; 再根据  $\gamma$  和  $\omega_c$  由式(5.5-15)计算出时域指标的  $t_{sv}$ 。

至于高阶系统可化成等效二阶系统的条件没有计算公式可依, 但从经验上讲, 如果高阶系统为最小相位系统, 且其对数幅频特性的中频段有较长的 20dB/dec 的斜率, 例如在  $\omega_c$  点左右各大于十倍频程的长度上有 20dB/dec 的斜率, 可近似按等效二阶系统处理。

5.5.10 计算机绘制伯德图程序

(1) 功能

- 可在计算机屏幕和打印纸上绘出伯德图。
- 在绘图同时, 可打印出伯德图的特征参数  $\omega_c, \gamma, \omega_1, K_g$ 。

(2) 传递函数表达式

$$G(s) = \frac{K e^{-Vs} \prod_{i=1}^{M-2F_1} (T_{1i}s + 1) \prod_{i=1}^{F_1} \left( \frac{s^2}{\omega_{n1i}^2} + 2\zeta_{1i} \frac{s}{\omega_{n1i}} + 1 \right)}{s^N \prod_{j=1}^{2F_2} (T_{2j}s + 1) \prod_{j=1}^{F_2} \left( \frac{s^2}{\omega_{n2j}^2} + 2\zeta_{2j} \frac{s}{\omega_{n2j}} + 1 \right)}$$

(3) 使用符号

- M, N, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, K, T 见传递函数表达式。
- 程序中一些与传递函数表达式中相应的符号

V = v

T1(1) = T<sub>11</sub>,      T2(1) = T<sub>21</sub>

WN1(I) =  $\omega_{n1i}$ ,    ZT1(I) =  $\zeta_{1i}$

WN2(I) =  $\omega_{n2i}$ ,    ZT2(I) =  $\zeta_{2i}$

• 其余符号

C——横坐标的频率比例尺;

W<sub>0</sub>——作图起始频率;

C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>——作图比例尺;

C<sub>4</sub>——作图时, 后一点频率与前一点频率的比值;

L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>, L<sub>4</sub>——作图屏幕限制值。

(4) 使用方法

在程序中给出数据:

- 在 3960 行 DATA 中给出 C, W<sub>0</sub> 的数据, 注意应使 C \* W<sub>0</sub> = 1。
- 在 3965 行 DATA 中给出 M, N, K, V, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, T 的数据。
- 在 3970 行 DATA 中给出 T1(I) 的数据, 其中

的 I = 1, 2, ..., M - 2F<sub>1</sub>。

- 在 3975 行 DATA 中依次给出 WN1(I), ZT1(I) 的数据, I = 1, 2, ..., F<sub>1</sub>。

- 在 3980 行 DATA 中给出 T2(I) 的数据, I = 1, 2, ..., N - 2F<sub>2</sub>。

- 在 3985 行 DATA 中依次给出 WN2(I), ZT2(I) 的数据, I = 1, 2, ..., F<sub>2</sub>。

如果某一行无数据, 则应在程序中消去该行号。

(5) 例题

例 3 若系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{50(1.28s + 1)(0.5s + 1)}{s(64s + 1)(0.167s + 1) \left( \frac{s^2}{2500} + 0.5 \frac{s}{50} + 1 \right)}$$

试用计算机绘制伯德图, 并计算  $\omega_c, \gamma, \omega_1, K_g$  的数值。

[解] ① 在程序中给出数据

```
3960 DATA 100, 0.01
3965 DATA 2, 5, 50, 1, 0, 1, 0
3970 DATA 1.28, 0.5
3975 DATA 0.167, 64, 50, 0.1
```

② 运行结果见图 5.5-16。图上给出了曲线特征参数为

$$\omega_c = 1.34748 \text{ rad/s}, \quad \gamma = 82.4656^\circ$$

$$\omega_1 = 49.83437 \text{ rad/s}, \quad K_g = 11.08151 \text{ dB}$$

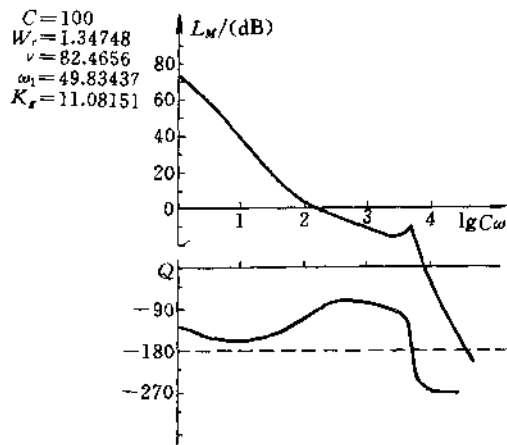


图 5.5-16 例 3 的伯德图

(6) BASIC 参考程序

```
3000 REM Bode plots
3005 CLS : KEY OFF
3010 SCREEN 2, 0
3015 LINE(160, 0) - (160, 100)
```

```

3016 LINE(160,0) - STEP(4,5)
3017 LINE(160,0) - STEP(-4,5)
3020 FOR I=0 TO 5
3025 LINE(160,20+16*I) - (168,20+16*I)
3030 LINE(160,12+16*I) - (164,12+16*I)
3035 NEXT I
3040 LINE(160,84) (570,84)
3041 LINE(570,84) - STEP(-10,2)
3042 LINE(570,84) - STEP(-10,-2)
3045 FOR I=1 TO 4
3050 LINE(160+80*I,80) - (160+80*I,84)
3055 NEXT I
3060 LOCATE 1,17:PRINT "dB"
3065 LOCATE 1,23:PRINT "Lm"
3070 LOCATE 3,17:PRINT "80"
3075 LOCATE 5,17:PRINT "60"
3080 LOCATE 7,17:PRINT "40"
3085 LOCATE 9,17:PRINT "20"
3090 LOCATE 11,17:PRINT "00"
3095 LOCATE 12,31:PRINT "1"
3100 LOCATE 12,41:PRINT "2"
3105 LOCATE 12,51:PRINT "3"
3110 LOCATE 12,61:PRINT "4"
3115 LOCATE 12,68:PRINT "lg cw"
3120 LINE(160,110) - (570,110)
3125 FOR I=1 TO 4
3130 LINE(160+80*I,106) - (160+80*I,110)
3135 NEXT I
3140 LINE(160,105) - (160,190)
3145 FOR I=1 TO 4
3150 LINE(160,110+18*I) - (168,110+18*I)
3155 LINE(160,100+18*I) - (164,100+18*I)
3160 NEXT I
3165 FOR I=0 TO 50 STEP 2
3170 LINE(160+8*I,146) - (168+8*I,146)
3175 NEXT I
3180 LOCATE 14,18:PRINT "Q"
3185 LOCATE 17,16:PRINT "-90"
3190 LOCATE 19,15:PRINT "-180"
3195 LOCATE 21,15:PRINT "-270"
3200 LOCATE 1,1
3220 READ L1,L2,L3,L4
3225 READ C1,C2,C3,C4
3230 READ C,W0
3235 READ M,N,K,V,F1,F2,T
3240 M1=M-2*F1:NI=N-V-2*F2
3245 IF M=0 THEN 3290
3250 IF M1=0 THEN 3270
3255 FOR I=1 TO M1
3260 READ T1(I)
3265 NEXT I
3270 IF F1=0 THEN 3295
3275 FOR I=1 TO F1
3280 READ WN1(I),ZT1(I)
3285 NEXT I
3290 IF N1=0 THEN 3310
3295 FOR I=1 TO N1
3300 READ T2(I)
3305 NEXT I
3310 IF F2=0 THEN 3330
3315 FOR I=1 TO F2
3320 READ WN2(I),ZT2(I)
3325 NEXT I
3330 PI=3.141592
3335 PRINT "C=";C
3340 W=W0
3345 X5=160+C1*.434295*LOG(C*W)
3350 GOSUB 3600
3355 LM0=LM
3360 RO=Q+PI
3365 Y5=84-C2*LM
3370 X7=X5
3375 Y7=110-Q*C3*180/PI
3380 W=C4*W
3385 X6=160+C1*.434295*LOG(C*W)
3390 GOSUB 3600
3395 LM1=LM
3400 R1=Q+PI
3405 Y6=84-C2*LM
3410 X8=X6
3415 Y8=110-Q*C3*180/PI
3420 LINE(X5,Y5) - (X6,Y6)
3425 LINE(X7,Y7) - (X8,Y8)
3430 X5=X6
3435 Y5=Y6
3440 X7=X8:Y7=Y8

```

```

3445 IF LMO * LM1 > 0 THEN 3470
3450 WC = W / (C4 * .5)
3455 PRINT "Wc = "; WC
3460 R = (PI * Q) * 180 / PI
3465 PRINT "r = "; R
3470 IF R0 * R1 > 0 THEN 3490
3475 W1 = W / (C4 * .5)
3480 PRINT "W1 = "; W1
3485 PRINT "Kg = "; -LM; "dB"
3490 IF X6 > L1 THEN 3990
3495 IF Y6 > L2 THEN 3990
3500 IF Y8 > L3 THEN 3990
3505 IF Y8 > L4 THEN 3990
3507 LMO = LM1 : RO = R1
3510 GOTO 3380
3600 G = K
3605 IF M = 0 THEN 3665
3610 IF M1 = 0 THEN 3630
3615 FOR I = 1 TO M1
3620 G = G * SQR(T1(I) * T1(I) * W * W + 1)
3625 NEXT I
3630 IF F1 = 0 THEN 3665
3635 FOR I = 1 TO F1
3640 W1 = W / WN1(I)
3645 B1 = 1 - W1 * W1
3650 B2 = 2 * ZT(I) * W1
3655 G = G * SQR(B1 * B1 + B2 * B2)
3660 NEXT I
3665 IF V = 0 THEN 3685
3670 FOR I = 1 TO V
3675 G = G / W
3680 NEXT I
3685 IF N1 = 0 THEN 3705
3690 FOR I = 1 TO N1
3695 G = G / SQR(T2(I) * T2(I) * W * W + 1)
3700 NEXT I
3705 IF F2 = 0 THEN 3740
3710 FOR I = 1 TO F2
3715 W2 = W / WN2(I)
3720 B3 = 1 - W2 * W2
3725 B4 = 2 * ZT2(I) * W2
3730 G = G / SQR(B3 * B3 + B4 * B4)
3735 NEXT I
3740 LM = 8.685889638 * LOG(G)
3750 Q = 0
3755 IF M = 0 THEN 3830
3760 IF M1 = 0 THEN 3790
3765 FOR I = 1 TO M1
3770 Q(I) = ATN(T1(I) * W)
3775 Q = Q + Q(I)
3780 NEXT I
3785 IF F1 = 0 THEN 3830
3790 FOR I = 1 TO F1
3795 IF B1 = 0 THEN 3815
3800 Q(I) = ATN(B2 / B1)
3805 IF B1 > 0 THEN 3820
3810 Q(I) = Q(I) + .5 * PI : GOTO 3820
3815 Q(I) = .5 * PI
3820 Q = Q + Q(I)
3825 NEXT I
3830 IF V = 0 THEN 3840
3835 Q = Q - .5 * V * PI
3840 IF N1 = 0 THEN 3865
3845 FOR I = 1 TO N1
3850 Q(I) = -ATN(T2(I) * W)
3855 Q = Q + Q(I)
3860 NEXT I
3865 IF F2 = 0 THEN 3915
3870 FOR I = 1 TO F2
3875 IF B3 = 0 THEN 3900
3880 Q(I) = -ATN(B4 / B3)
3885 IF B3 > 0 THEN 3905
3890 Q(I) = Q(I) - PI
3895 GOTO 3905
3900 Q(I) = -.5 * PI
3905 Q = Q + Q(I)
3910 NEXT I
3915 Q = Q + T
3920 RETURN
3950 DATA 600, 150, 190, 80
3955 DATA 80, 0.8, 0.2, 1.05
3960 DATA
3965 DATA
3970 DATA
3975 DATA
3990 END

```

### 5.6 自动控制系统校正

#### 5.6.1 系统校正

为了提高和改善系统的性能指标,常在系统中加入某些附加装置,这些附加装置称为校正装置或补偿器,选择与确定校正装置的过程称为校正或补偿。

系统校正有两种方式,串联校正和反馈校正。如果校正装置位于前向通路,与未校正部分相串联,则这种方式称为串联校正,如图 5.6-1 所示,图中  $G_0(s)$ 、 $H(s)$  为未校正系统的传递函数,  $G_c(s)$  为校正装置的传递函数;如果校正装置位于反馈通路,则这种方式称为反馈校正,如图 5.6-2 所示,图中  $H_c(s)$  是校正装置的传递函数。

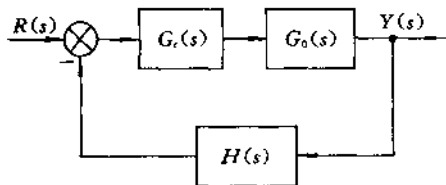


图 5.6-1 串联校正方框图

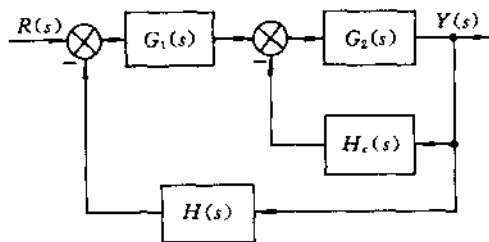


图 5.6-2 反馈校正方框图

#### (2) 有源校正装置

对于图 5.6-3 所示运算放大器,其传递函数为

$$G(s) = \frac{z_2}{z_1} \quad (5.6-1)$$

选择不同的  $z_1$  和  $z_2$ , 可获得各种特性的校正装置,表 5.6-2 示出常用有源校正装置的原理图和传递函数。

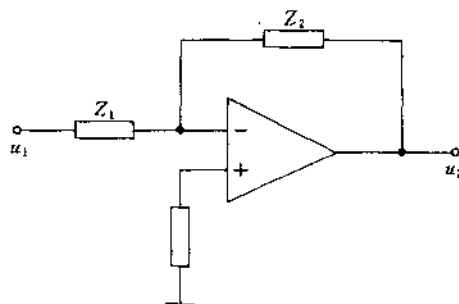


图 5.6-3 运算放大器原理图

#### 5.6.2 常用校正装置

##### (1) 无源校正网络

常用无源校正网络见表 5.6-1。

表 5.6-1 常用无源校正网络

名称	原理图	传递函数	零极图	伯德图
超前网络		$G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + T s}$ $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$ $T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$		

续表

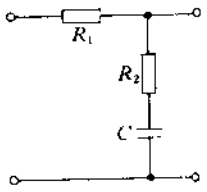
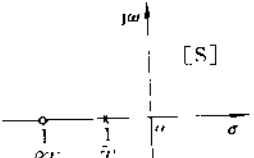
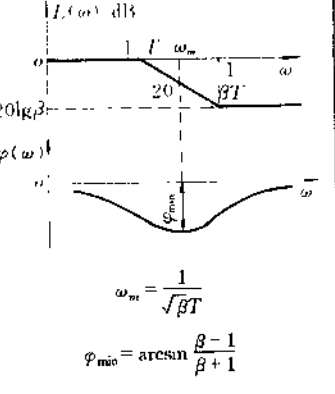
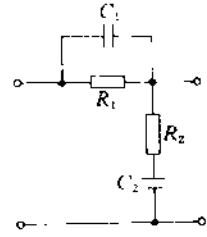
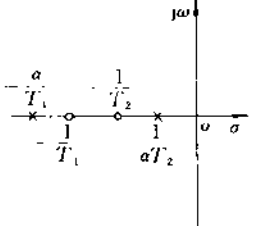
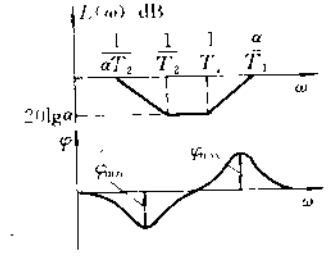
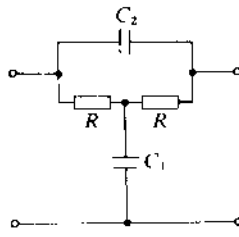
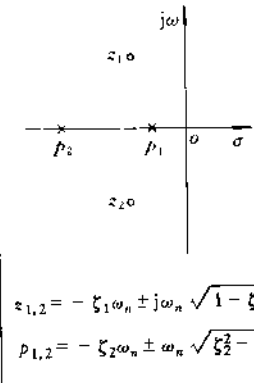
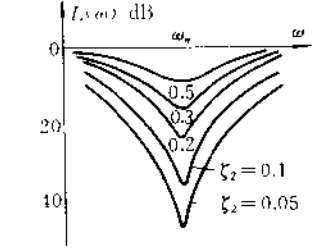
名称	原理图	传递函数	零极点图	伯德图
滞后网络		$G(s) = \frac{\beta T s + 1}{T s + 1}$ $T = (R_1 + R_2)C$ $\beta = \frac{\beta T s + 1}{T s + 1}$		
滞后-超前网络		$G(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{a} s + 1\right)(a T_2 s + 1)}$ $T_1 = R_1 c_1$ $T_2 = R_2 c_2$ $T_{12} = R_1 c_2$ $a = \frac{T_1 + T_2 + T_{12}}{2 T_2}$ $\sqrt{\frac{(T_1 + T_2 + T_{12})^2 - 4 T_1 T_2}{2 T_2}}$		
T型网络		$G(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_n} + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_2 \frac{s}{\omega_n} + 1}$ $\omega_n = \frac{1}{R \sqrt{c_1 c_2}}$ $\zeta_1 = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ $\zeta_2 = \frac{c_1 + 2c_2}{2 \sqrt{c_1 c_2}} = \frac{1}{2\zeta_1} + \zeta_1$		

表 5.6-2 常用有源校正网络

名称	原理图	传递函数
比例(P)网络		$G(s) = -K$ $K = \frac{R_2}{R_1}$
积分(I)网络		$G(s) = \frac{-1}{Ts}$ $T = R_1 C$
微分(D)网络		$G(s) = -\tau s$ $\tau = R_1 C$
比例-积分(PI)网络		$G(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts}$ $\tau = R_2 C$ $T = R_1 C$
比例-微分(PD)网络		$G(s) = -K(\tau s + 1)$ $K = \frac{R_2 + R_3}{R_1}$ $\tau = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C$



续表

名称	原理图	传递函数
比例-微分-积分(PID)网络		$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{Ts}$ $K = \frac{R_2}{R_1}, T = \tau_1 = R_2 c_1, \tau_2 = R_3 c_2$ <p>(条件: <math>R_2 \gg R_3, c_2 \gg c_1</math>)</p>
滞后网络		$G(s) = -\frac{K(\tau s + 1)}{Ts + 1}$ $K = \frac{R_2}{R_1}$ $\tau = R_2 c, T = (R_2 + R_3) c$
超前网络		$G(s) = -\frac{K(\tau s + 1)}{Ts + 1}$ $K = \frac{R_2}{R_1}$ $\tau = (R_1 + R_2) c, T = R_2 c$
滞后-超前网络		$G(s) = -\frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ $K = \frac{R_3}{R_1}, \tau_1 = (R_1 + R_2) c_1$ $\tau_2 = R_4 c_2, T_1 = R_2 c_1$ $T_2 = (R_3 + R_4) c_2$
带阻滤波网络		$G(s) = -\frac{K \left( \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_n} + 1 \right)}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_2 \frac{s}{\omega_n} + 1}$ $K = \frac{R_3}{R_1 + R_2}, \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\zeta_1 = \frac{r}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}, \zeta_2 = \frac{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{2\sqrt{\frac{L}{C}}}$

(3) 带阻滤波器仿真电路

用无源 T 型网络校正的缺点是开环传递函数在增加二阶复数零点的同时,还产生大时间常数的惯性环节,因此还要进一步校正;对表 5.6-2 中的带阻滤波器,只适用于阻止较高的某一频带的信号;双 T 滤波器由于频率特性的频带太窄而不好用。由仿真电路所构成的带阻滤波器可避免上述缺点。

若带阻滤波器的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n - \omega_n^2}$$

它可用图 5.6-4 仿真电路图去构成相应电路来实现。关于仿真电路的理论与实践可参考有关书籍。

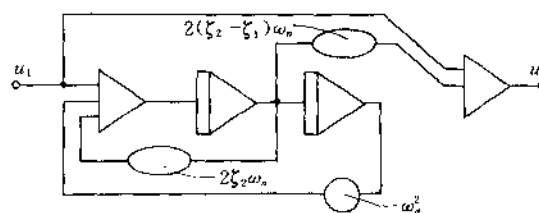


图 5.6-4 带阻滤波器仿真图

5.6.3 串联校正

串联校正的原理及适用范围示于表 5.6-3。

表 5.6-3 串联校正

校正方法	校正原理	适用范围
超前校正	超前校正的特点是它能提供正的相位角。若使其提供的相角最大值 $\varphi_{max}$ 出现在未校正系统对数幅频特性为 0dB 时的频率附近,则可提高系统的相角裕量 $\gamma$ 和截止频率 $\omega_c$ 的值。	适用于未校正系统稳态精度已满足要求,但过渡过程性能指标尚未满足要求的情况 校正后可使 $t_s$ 和 $\sigma_p$ 减小
滞后校正	利用滞后网络的高频衰减特性,使校正后系统的对数幅频特性的中、高频段下降,以提高系统的相角裕量;如果未校正系统的相角裕量已满足设计指标,则可进一步提高开环增益,复原中频段,以提高系统稳态精度 设计时,滞后网络的负相位角选择在中频段之左甚远,不影响相角裕量	适用于系统过渡过程指标已满足设计要求,但稳态精度还不够的情况 滞后校正可提高开环增益 K
滞后~超前校正	其原理同滞后校正和超前校正,它兼有滞后和超前校正的优点	适用于需要同时改善过渡过程和稳态精度的情况
带阻滤波器校正	其原理是,利用带阻滤波器的对数幅频特性的凹陷特性,来压低小阻尼比二阶振荡环节对数幅频特性的谐振尖峰	适用于含有低阻尼比二阶振荡环节的系统

5.6.4 串联带阻滤波器校正举例

例 若单位反馈系统开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s(0.25s^2 + 0.1s + 1)}$$

试设计一个串联校正装置,使系统满足指标  $K_p = \infty$ 、 $K_v = 2$ 、 $\gamma = 45^\circ$ 、 $K_g = 15\text{dB}$ 。

[解] ①未校正系统为 I 型系统,  $K_p = \infty$ , 已满足要求,又由  $K_v = 2$ , 可得系统开环增益  $K = K_0 = 2$ 。

②绘制  $K = 2$  时未校正系统对数频率特性,示于图 5.6-5 的实线。由图 5.6-5 实线查得:  $\omega_c = 2.52\text{rad/s}$ ,  $\gamma = -66^\circ$ , 系统不稳定。

(3) 确定校正装置传递函数

为削去低阻尼比二阶振荡环节引起的对数幅频特性谐振尖峰,在系统中串入图 5.6-6 所示的 T 型滤波器,并使  $\omega_n = 2\text{rad/s}$ ,  $\zeta_1 = 0.1$ , 则 T 型滤波器的传递函数为

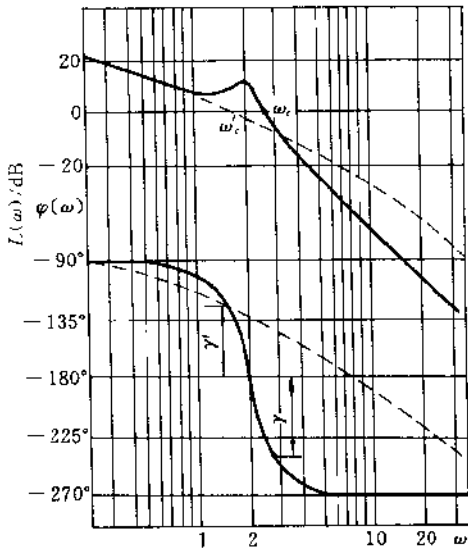


图 5.6-5 例题的伯德图

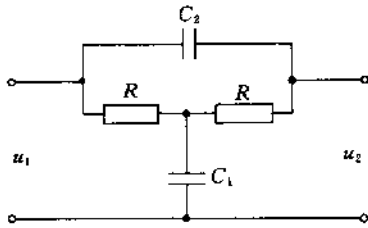


图 5.6-8 T型滤波器

$$G_{c1}(s) = \frac{0.25s^2 + 0.1s + 1}{0.25s^2 + 5.05s + 1}$$

$$= \frac{0.25s^2 + 0.1s + 1}{(5s + 1)(0.05s + 1)}$$

这时 T 型滤波器传递函数中二阶微分环节所形成的共轭复数零点与被控对象中二阶振荡环节所形成的极点相抵消,但同时又增加了两个惯性环节,其中的大时间常数  $T_1 = 5$  秒,将影响系统的响应速度,因此,再串入超前网络,使其抵消大时间常数的极点,可令超前网络的传递函数为

$$G_{c2}(s) = \frac{5s + 1}{0.5s + 1}$$

全部校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = G_{c1}(s)G_{c2}(s)$$

$$= \frac{0.25s^2 + 0.1s + 1}{(5s + 1)(0.05s + 1)} \cdot \frac{5s + 1}{0.5s + 1}$$

$$= \frac{0.25s^2 + 0.1s + 1}{(0.5s + 1)(0.05s + 1)}$$

(4) 绘制校正后系统伯德图

校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s)$$

$$= \frac{0.25s^2 + 0.1s + 1}{(0.5s + 1)(0.05s + 1)} \cdot \frac{2}{s(0.25s^2 + 0.1s + 1)}$$

$$= \frac{2}{s(0.5s + 1)(0.05s + 1)}$$

图 5.6-5 虚线绘出校正后的系统伯德图。从图中查得  $\omega'_c = 1.56 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma' = 47.3^\circ$ ,  $K_g = 21 \text{ dB}$ , 满足设计指标。

(5) 确定校正装置的结构和参数

确定 T 型网络的物理参数 对图 5.6-6 所示的 T 型网络,其传递函数为

$$G_{c1}(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_n} + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta_2 \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

式中

$$\omega_n = \frac{1}{R\sqrt{c_1c_2}}, \zeta_1 = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \zeta_2 = \frac{1}{2\zeta_1} + \zeta_1$$

前面设计已取  $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta_1 = 0.1$ 。今取  $c_1 = 50 \mu\text{F}$  则  $c_2 = \zeta_1^2 c_1 = 0.1^2 \times 50 = 0.5 \mu\text{F}$

$$R = \frac{1}{\omega_n \sqrt{c_1c_2}}$$

$$= \frac{1}{2 \times \sqrt{50 \times 10^{-6} \times 0.5 \times 10^{-6}}} = 100 \text{ k}\Omega$$

确定超前网络物理参数 超前网络如图 5.6-7 所示,其传递函数为

$$G_{c2}(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{Ts + 1}$$

式中  $K = \frac{R_3}{R_1}$ ,  $\tau = (R_1 + R_2)c$ ,  $T = R_2c$

取  $c = 50 \mu\text{F}$ , 则有

$$R_2 = \frac{T}{c} = \frac{0.5}{50 \times 10^{-6}} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = \frac{\tau}{c} = R_2$$

$$= \frac{5}{50 \times 10^{-6}} = 10000 = 90 \text{ k}\Omega$$

如果取  $K = 1$ , 则有

$$R_3 = R_1 = 90 \text{ k}\Omega$$

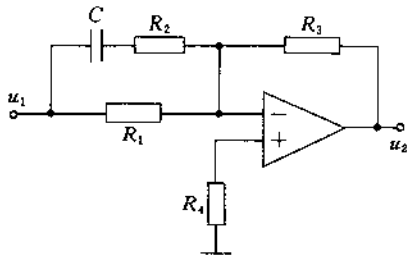


图 5.6-7 超前网络原理图

由于 T 型网络要求后续有较高的输入阻抗,所以在 T 型网络和超前网络之间加入射极跟随器隔离。最后得全部校正装置原理图示于图 5.6-8。须要指出,图 5.

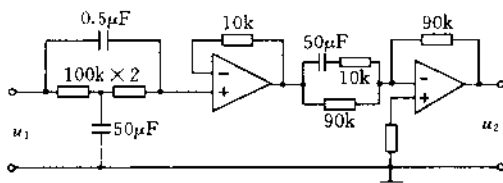


图 5.6-8 例题的校正装置电路原理图

6-8 校正电路使得信号反号,在构成具体系统时,须再反回来。

5.6.5 串联 PID 调节器校正

多年来,PID 调节器一直作为工业控制上的主要串联校正装置获得广泛应用。从控制原理的角度来看,用 PID 调节器作串联校正是滞后-超前校正的一种特例。

• 具有 PID 调节器校正的控制系统结构图如图 5.6-9。

• PID 调节器的数学模型(见表 5.6-4)。

从上述结构图和数学模型看出,一旦确定了  $K, K_i$  和  $K_d$  这三个参数,PID 调节器的形式也就完全确定了。

• 串联 PID 调节器校正的特点(见表 5.6-5)。

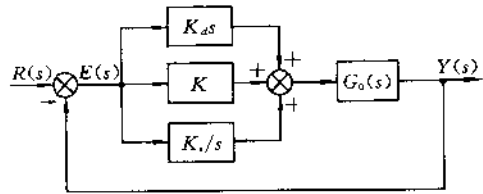


图 5.6-9 具有 PID 调节器校正的系统结构图

表 5.6-4 PID 调节器的数学模型

PID 调节器的数学模型	
运动方程	$u(t) = K[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt}]$ <p>式中 <math>e(t)</math>——调节器的输入量  <math>u(t)</math>——调节器的输出量  <math>K</math>——比例增益  <math>T_i</math>——积分时间常数  <math>T_d</math>——微分时间常数</p>
传递函数	$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K + \frac{K_i}{s} + K_d s$ <p>式中 <math>G_c(s)</math>——PID 调节器传递函数  <math>K</math>——比例增益  <math>K_i = \frac{K}{T_i}</math>——积分系数  <math>K_d = KT_d</math>——微分系数</p>

表 5.6-5 串联 PID 调节器校正的特点

特点	说明
对被控对象数学模型的要求低	前几节介绍的各种校正装置和方法,都是依据系统的数学模型来确定的,它们对数学模型的精确性要求较高。而 PID 调节器校正对被控对象的数学模型精确度要求不高,甚至有时在系统模型完全未知的情况下也能使用。
调节方便、灵活	在 PID 调节器中,其比例、积分、微分的调节作用相互独立,最后以求和的形式出现,人们可以任意改变其中的某一调节规律,或单独采用 PI 或 PD 控制,这就大大增加了使用的灵活性。
适应范围广	采用一般的校正装置,当原系统参数变化时,系统的性能将会产生很大改变。而 PID 调节器的适应范围要广得多,当原系统的参数在一定范围内变化时,仍有很好的调节效果。

(D) 使用情况(见表 5.6-6)。独立,以求和的形式出现,所以一个 PID 调节器常根据系统要求使用 PI、PD 或 PID。

表 5.6-6 串联 PID 调节器校正的使用情况

类型	传递函数	使用情况说明
PI 调节器校正	$G_c(s) = \frac{K(T_s + 1)}{T_s}$	如欲提高系统的稳态精度,可选用串联 PI 调节器校正。它可使稳态精度提高一个等级。为了使 PI 调节器的引入不影响或少影响系统的稳定性,应取 $T_i \approx \frac{1}{\omega_c} \text{ 或 } T_i \geq T_{max}$ 式中 $T_i$ ——积分时间常数 $\omega_c$ ——校正后系统的截止频率 $T_{max}$ ——未校正系统中最大的惯性环节时间常数
PD 调节器校正	$G_c(s) = K(T_d s + 1)$	如果系统过渡过程指标或稳定性不满足要求,可选择串联 PI 调节器校正。为使校正后得到满意的效果,可取微分时间常数 $T_d \approx \frac{10}{\omega_c}$ 式中 $\omega_c$ ——校正后系统的截止频率
PID 调节器校正	$G_c(s) = K(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$	如果系统的稳态精度及过渡过程均欲改善,可选用串联 PID 调节器校正。PID 调节器的参数选择可分 PI 和 PD 两步进行。

对采用串联 PID 调节器校正的实际过程控制系统,其调试过程多是根据阶跃响应曲线用试凑法逐渐调节  $\delta = 1/K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  的数值,直至响应曲线满意为止。如果已知系统的数学模型,可参考表 5.6-6 中给出的  $T_i$  及  $T_d$  的选取方法估算出  $T_i$  和  $T_d$ ,再进行调试,则可缩短系统的调试过程。

反馈校正有稳定被反馈包围部分元件参数和抗干扰能力强的优点,因此被广泛应用。其缺点是在计算机和实现方面都比较复杂。

局部反馈可改善开环系统特性,因而有可能改善闭环系统特性。表 5.6-7 给出了几种常见的局部反馈校正结构图及其特性。

5.6.6 反馈校正

表 5.6-7 局部反馈校正及其特性

方法	结构图	等效传递函数	效果
用比例反馈包围惯性环节		$G'(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + aK} \frac{1}{\frac{T}{1 + aK} s + 1}$	(1) 减小惯性环节的时间常数 (2) 虽降低了开环增益,但可通过提高未被包围部分的增益来补偿

续表

方法	结构图	等效传递函数	效果
用微分反馈包围积分环节和惯性环节		$G'_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ $= \frac{K}{1+bs} \cdot \frac{1}{s(Ts+1)}$	(1) 保存了原有的积分环节 (2) 减小了惯性环节的时间常数 (3) 虽降低了开环增益,但可通过提高未被包围部分增益来补偿
用一阶和二阶微分包围积分环节和振荡环节		$G'_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ $= \frac{K'}{s^2 \left( \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + 2\xi \frac{1}{\omega_n} s + 1 \right)}$ $K' = \frac{K}{1+Kb}$ $\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1+Kb}} + \frac{Kc\omega_n}{2\sqrt{1+Kb}}$ $\omega_n' = \omega_n \sqrt{1+Kb}$	(1) 保存原有积分环节 (2) 一阶微分负反馈可提高振荡环节的无阻尼自然频率 (3) 二阶微分负反馈可增加振荡环节的阻尼比

### 5.7 离散控制系统

#### 5.7.1 概述

(1) 离散控制系统中几种信号的含义及特征

**模拟信号** 时间上连续和幅值上也连续的信号。

如图 5.7-2 中信号  $y(t)$ 。

**采样信号(离散模拟信号)** 把模拟信号按一定时间间隔进行采样,转变为只有在采样时刻才有数值,而在两采样点之间没有信号的一连串脉冲的形式称采样信号。其特征是在时间上离散,而幅值上连续。如图 5.7-2 中的信号  $y^*(t)$ 。

**数字信号** 把采样信号在幅值上进行整量化转换成二进制编码形式称数字信号,其特征是在时间上离散和幅值上离散量化。如图 5.7-2 中的  $y(kT)$  和  $u(kT)$ 。

**量化模拟信号** 将数字信号恢复成模拟信号的形式称量化模拟信号,其特征是时间上连续而幅值上连续量化。如图 5.7-2 中的  $u(t)$ 。

采样信号和数字信号均属于离散信号,它们的特征是只在离散时刻有数值,而在两个离散时刻之间没有信号。

(2) 离散控制系统

在控制系统中有一处或数处存在离散信号的系统

称为离散控制系统。离散控制系统包括采样控制系统和数字控制系统两种类型。

**采样控制系统** 如果系统中被采样的模拟信号仅变成时间上断续的脉冲序列,则称该系统为采样控制系统,如图 5.7-1 所示。

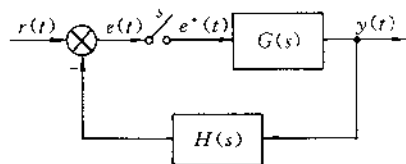


图 5.7-1 采样控制系统结构图

**数字控制系统** 如果系统中对模拟信号既采样、又量化,变成时间上和幅值上都是断续的数字信号,则称该系统为数字控制系统,又称数字计算机控制系统,如图 5.7-2 所示。

#### 5.7.2 信号的采样和复现

(1) 信号的采样

A. 采样过程

把时间上连续和幅值上也连续的模拟信号,按一定的时间间隔  $T$  转变为在瞬时  $0, T, 2T, \dots, kT$  一连串脉冲信号的过程称为采样过程,实现采样的装置叫

采样器或采样开关,如图 5.7-3 所示,把采样开关每次通断的时间间隔  $T$  称为采样周期,采样器的输入信

号  $x(t)$  称为原信号,而经采样后的输出信号  $x^*(t)$  称为采样信号。

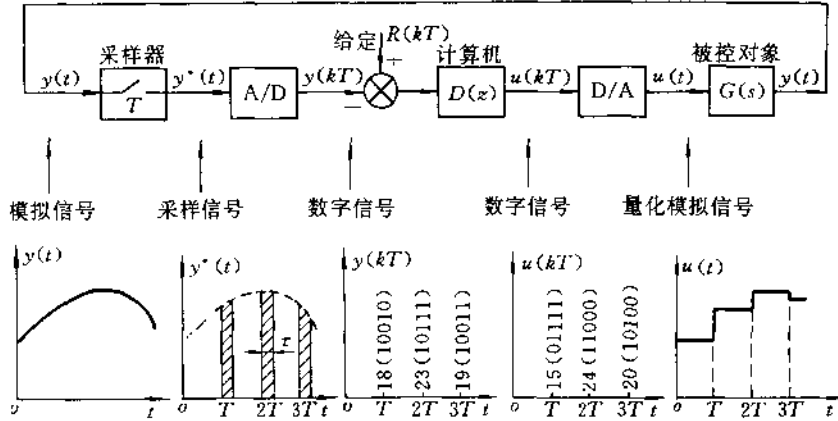


图 5.7-2 数字控制系统结构图

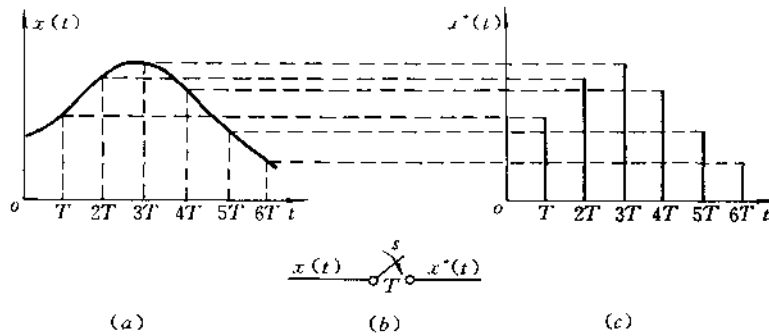


图 5.7-3 采样过程

B. 采样器的数学模型

对图 5.7-3 中的采样过程,设采样器接通时间为  $\tau$ ,采样周期为  $T$ ,且满足  $\tau \ll T$ ,则采样器的输出可表示为

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (5.7-1)$$

式中,  $\delta(t - kT)$  表示发生在  $t = kT$  时刻的理想采样脉冲。

因已假设为理想采样脉冲,所以  $x^*(t)$  只与  $x(t)$  在脉冲出现瞬间的值  $x(kT)$  有关,而与采样时刻以外的值无关。这样,可将式(5.7-1)改写为

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (5.7-2)$$

C. 采样定理(香农定理)

选择采样周期  $T$  的理论依据是采样定理,它给出

了从采样信号  $x^*(t)$  唯一地复现原信号  $x(t)$  所必需的最低采样频率。

设原信号频谱的最高频率分量为  $\omega_{max}$ ,采样频率为  $\omega_s$  ( $\omega_s = 2\pi/T$ ),采样定理指出

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \quad (5.7-3)$$

或

$$T \leq \pi/\omega_{max} \quad (5.7-4)$$

即当且仅当采样频率至少是原连续信号频谱中最高频率分量两倍时,才能把采样信号恢复成原连续信号。

(2) 信号的复现

把离散信号转换成连续信号的过程称为信号复现。信号复现是由保持器来实现的。

A. 保持器的原理

它是根据现在时刻或过去时刻的采样值,用常数、线性函数和抛物线函数等去逼近两个采样时刻之间的原信号。这样保持器可分成零阶保持器、一阶保持器

和高阶保持器。

图 5.7-4 所示。

应用最广泛的是零阶保持器,其信号保持过程如

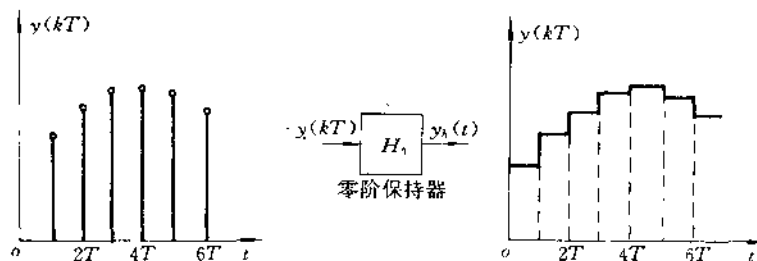


图 5.7-4 零阶保持器

B. 零阶保持器的数学模型

时域表达式

$$x_h(t) = x(kT) \quad (5.7-5)$$

$$kT \leq t < (k+1)T$$

传递函数

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (5.7-6)$$

频率特性

$$G_h(j\omega) = T \frac{\sin \frac{T\omega}{2}}{\frac{T\omega}{2}} e^{-j\frac{T\omega}{2}} \quad (5.7-7)$$

根据式(5.7-7)画出零阶保持器的幅频特性及相频特性示于图 5.7-5。图中  $\omega_s = 2\pi/T$ ,  $\omega_s$  称采样角频率。

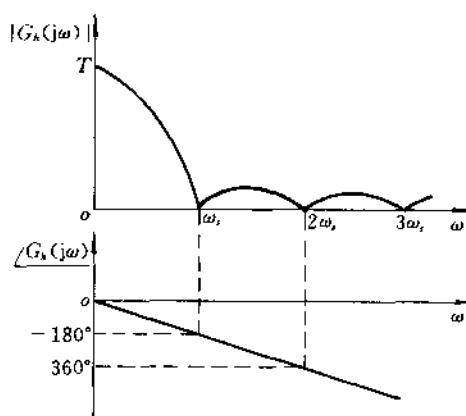


图 5.7-5 零阶保持器的频率特性

5.7.3 z 变换

(1) z 变换定义

采样信号与连续信号之间的关系为

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

对上式两端取拉氏变换,得

$$x^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$(5.7-8) \quad 1_0$$

令  $z = e^{Ts}$ , 则式(5.7-8)可写成

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (5.7-9)$$

$X(z)$  称采样信号  $x^*(t)$  的 z 变换。以  $\mathcal{Z}[x^*(t)]$  表示对  $x^*(t)$  进行 z 变换,有时也使用符号  $\mathcal{Z}[x(t)]$ ,但其含义仍然是对其采样信号进行 z 变换。

(2) z 变换表

常用时间函数的 z 变换和拉氏变换列于表 5.7-1

表 5.7-1 常用时间函数的 z 变换

$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kTs}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$



续表

$X(s)$	$x(t)$ 或 $x(k)$	$X(z)$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{b-a}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}\right)$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{a}\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(t-\frac{1-e^{-at}}{a}\right)$	$\frac{1}{a}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}\right]$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2+ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
	$a^k$	$\frac{z}{z-a}$
	$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

(3)  $z$  变换的基本定理常用的  $z$  变换的基本定理列于表 5.7-2。表 5.7-2  $z$  变换的基本定理

名称	定理内容
线性定理	$\mathcal{Z}[a r_1(t) + b r_2(t)] = aX_1(z) + bX_2(z)$
时域后移定理	$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n}X(z)$
时域前移定理	$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^n[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}]$
复域位移定理	$\mathcal{Z}[e^{\pm at}x(t)] = X(e^{\mp aT}z)$
复域微分定理	$\mathcal{Z}[tx(t)] = -Tz \frac{dX(z)}{dz}$
初值定理	$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ , 如果极限存在
终值定理	$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ 条件: $\frac{z-1}{z}X(z)$ 在单位圆上及单位圆外解析

(4)  $z$  反变换

由  $X(z)$  求  $x^*(t)$  或  $x(kT)$  称为  $z$  反变换,  $z$  反变换有下面三种方法:

## A. 幂级数展开法

如果  $X(z)$  是真有理函数或严格真有理函数, 则可利用长除法把它展成  $z^{-1}$  的幂级数, 即

$$X(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \quad (5.7-10)$$

根据  $X(z)$  的定义,  $z^{-k}$  的系数  $C_k$  就是  $x(kT)$ 。这种方法适用于简单函数, 但难以求得答案的封闭形式。

**例 1** 对于

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \\ = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \cdots$$

则  $x(kT)$  为:  $x(0)=0, x(T)=1, x(2T)=3, x(3T)=7, x(4T)=15, \dots$

## B. 部分分式法

当  $X(z)$  为  $z$  的有理函数, 且其分母多项式能分解因式求出极点时, 可以利用部分分式法把  $X(z)$  变成分式和的形式, 然后再根据  $z$  变换表求出  $x^*(t)$  或  $x(kT)$ 。

说明: 鉴于  $z$  变换表中的  $z$  函数的分子通常都含有  $z$  因子, 因此, 首先把  $X(z)/z$  展开成部分分式, 然后将所得的结果, 各项再乘以  $z$ , 就得到  $X(z)$  的分式和的形式。当  $X(z)/z$  只含有单极点时, 则有

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z-z_i} \\ X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z-z_i} \quad (5.7-11)$$

式中,  $z_i$  是  $X(z)/z$  的极点,  $A_i$  是相应于  $z_i$  的留数, 即

$$A_i = \left[ (z-z_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_i} \quad (5.7-12)$$

**例 2** 对于

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

因为

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

则有

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

将上式去查表 5.7-1 得

$$x(kT) = 2^k - 1$$

于是,  $x(0)=0, x(T)=1, x(2T)=3, x(3T)=7, \dots$

## C. 留数法

如果已求出  $X(z)$  的极点  $z_i$ , 则可应用留数计算  $x(kT)$ , 即

$$x(kT) = \sum_{i=1}^n \text{Res}[X(z)z^{k-1}]_{z=z_i} \quad (5.7-13)$$

式中  $\text{Res}[\cdot]$  表示函数在极点上的留数,  $z_i$  是  $X(z) \cdot z^{k-1}$  的极点,  $i$  是极点数,  $k=0, 1, 2, \dots$ , 应注意: 当  $k=0$  时,  $X(z)z^{k-1} = X(z)z^{-1}$ , 在原点可能有一个极点。若有此极点, 则  $X(z)z^{k-1}$  在原点处的留数也应计算, 并且把这点的留数  $x(kT)$  乘以  $\delta(k)$ , 此处  $\delta(k)$  定义为

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

**例 3** 对于

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

则有

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^k}{(z-1)(z-2)}$$

根据式(5.7-13)则得

$$x(kT) = \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)}(z-1) \right]_{z=1} \\ + \left[ \frac{z^k}{(z-1)(z-2)}(z-2) \right]_{z=2} \\ = 2^k - 1$$

于是,  $x(0)=0, x(T)=1, x(2T)=3, x(3T)=7, x(4T)=15, \dots$

## 5.7.4 脉冲传递函数

## (1) 定义

在初始条件为零时, 采样系统输出量的  $z$  变换与其输入量的  $z$  变换之比称为系统的脉冲传递函数或称  $z$  传递函数。

若以  $Y(z)$  表示系统输出量的  $z$  变换, 以  $X(z)$  表示输入量的  $z$  变换, 以  $G(z)$  表示系统脉冲传递函数, 则有

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (5.7-14)$$

## (2) 脉冲传递函数与连续系统单位脉冲

响应的关系

对于图 5.7-6 所示采样系统, 其脉冲传递函数为

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \quad (5.7-15)$$

式中  $g(kT)$  为连续系统的单位脉冲响应的离散值。式(5.7-15)表明:采样系统的脉冲传递函数等于其连续系统单位脉冲响应的  $z$  变换。这个关系式也可作为采样系统脉冲传递函数的定义。

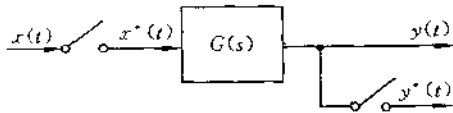


图 5.7-6 采样系统方框图

(3) 串联环节的脉冲传递函数

A. 串联环节之间含有采样器

图 5.7-7 示出两连续环节之间含有采样器的系统。图中  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  分别表示两连续环节的传递函数,  $s_1, s_2, s_3$  为同步采样器, 则系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z)G_2(z) \quad (5.7-16)$$

式中  $G_1(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)]\}$ ;

$G_2(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G_2(s)]\}$ 。

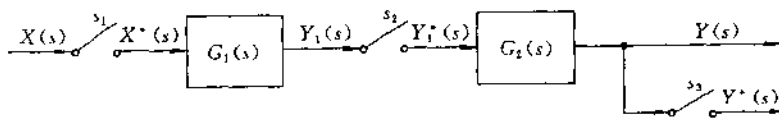


图 5.7-7 两环节之间含有采样器的系统

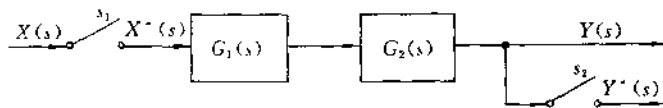


图 5.7-8 两环节之间不含采样器的系统

B. 串联环节之间不含采样器

图 5.7-8 示出两串联环节之间不含采样器的系统。图中  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  分别表示两串联环节的传递函数。显然两串联环节可为一体。如果此采样系统的脉冲传递函数用  $G_1G_2(z)$  表示, 则有

$$G_1G_2(z) = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}[G_1(s)G_2(s)]\} \quad (5.7-17)$$

(4) 闭环系统的脉冲传递函数

闭环采样系统如图 5.7-9 所示。对于该系统应用串联环节脉冲传递函数的求法及图中的变量关系可得

$$\left. \begin{aligned} E_1(z) &= R(z) - B(z) \\ Y(z) &= G(z)E_1(z) \\ B(z) &= GH(z)E_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.7-18)$$

对式(5.7-18)进行运算, 可得闭环脉冲传递函数

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (5.7-19)$$

为查阅方便, 表 5.7-3 示出几种闭环采样系统的结构图及它们的输出量  $z$  变换表达式。

应该指出, 采样器在系统中的位置不同, 其脉冲传递函数不同。求闭环系统脉冲传递函数的方法应根据系统中串联环节的不同连接形式, 列写各变量  $z$  变换的代数方程组, 解方程组可得闭环采样系统的脉冲传递函数或输出量的  $z$  变换, 切不可任意推广表中的结果。

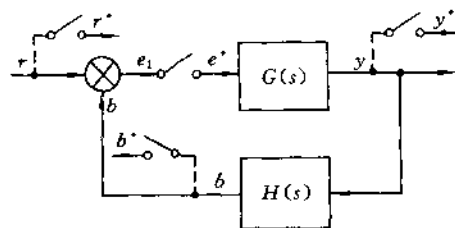


图 5.7-9 闭环采样系统

表 5.7-3 闭环采样系统典型结构图及其输出量的 z 变换

结构图	输出量的 z 变换 $Y(z)$
	$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
	$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
	$Y(z) = \frac{RG(z)}{1 + GH(z)}$
	$Y(z) = \frac{G_2(z)RG_1(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$
	$Y(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$

5.7.5 采样系统的稳定性

(1) 系统稳定的必要充分条件

由于 s 平面虚轴在 z 平面的映象为单位圆, s 平面左半部映射到 z 平面的单位圆内部, s 平面右半部

在 z 平面的映象为单位圆外部, 如图 5.7-10(a)、(b) 所示。因此, 对于采样控制系统, 其稳定的必要充分条件是系统脉冲传递函数的极点应全部位于 z 平面的单位圆内。z 平面上单位圆周为稳定域的边界, 如系

统有极点在  $z$  平面的单位圆外或单位圆上,则系统不稳定。

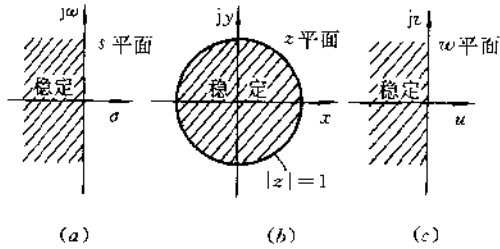


图 5.7-10 系统的稳定区域

(2) 稳定性的代数判据

若采样系统的特征方程为

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (5.7-20)$$

为判别其根是否在单位圆内,须取如下的所谓双线性变换,即令

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (5.7-21)$$

把式(5.7-21)代入式(5.7-20),整理后可得一以  $w$  为变量的新的代数方程。可以证明:如果新代数方程的所有根位于  $w$  平面的左半部(见图 5.7-10c),则原方程的所有根位于  $z$  平面的单位圆内。这样可以用劳斯判据通过判别  $w$  平面上根的位置来确定采样系统的稳定性。

例 4 试求图 5.7-11 所示的闭环采样控制系统稳定时的  $k$  值范围。

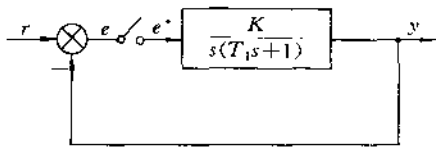


图 5.7-11 例 4 采样控制系统

[解]系统连续部分的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)}$$

查表 5.7-1 可得系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{K(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1})}$$

式中  $T$ ——采样周期;

$T_1$ ——图 5.7-11 所示系统连续部分惯性环节的时间常数。

查表 5.7-3 第一栏,令  $H(s) = 1$ ,得闭环系统脉

冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{K(1 - e^{-T/T_1})z}{(z-1)(z - e^{-T/T_1}) + K(1 - e^{-T/T_1})z} = \frac{K(1 - e^{-T/T_1})z}{z^2 + [K(1 - e^{-T/T_1}) - (1 + e^{-T/T_1})]z + 1 - e^{-T/T_1}}$$

其特征方程为

$$z^2 + [K(1 - e^{-T/T_1}) - (1 + e^{-T/T_1})]z + 1 - e^{-T/T_1} = 0$$

将上式进行  $z-w$  变换并整理后得

$$[2(1 + e^{-T/T_1}) - K(1 - e^{-T/T_1})]w^2 + 2(1 - e^{-T/T_1})w + K(1 - e^{-T/T_1}) = 0$$

由劳斯判据可知,对于二阶系统,只要特征方程的各项系数均大于零,系统就是稳定的。由于  $(1 - e^{-T/T_1}) > 0$ ,所以为使系统稳定,必须满足

$$[2(1 + e^{-T/T_1}) - K(1 - e^{-T/T_1})] > 0$$

解上述不等式,并考虑  $K > 0$ ,得该系统稳定时  $K$  的变化范围为

$$0 < K < \frac{2(1 + e^{-T/T_1})}{1 - e^{-T/T_1}} \quad (5.7-22)$$

对上例的分析可有如下结论:对没有采样器的二阶连续系统,只要  $K$  大于零,系统总是稳定的,但当系统增加采样器变成采样系统后,开环增益被限制在式(5.7-22)要求的范围之内系统才稳定。一般说来,引入采样器会降低系统的稳定性,且采样周期越大,系统稳定性越差。不过,实践证明,对于带有很大时间延迟(大滞后)对象的系统则例外。

5.7.6 采样系统的瞬态响应

如果已知采样控制系统的数学模型,则通过  $z$  变换法不难求出典型输入作用下的输出响应  $y^*(t)$ ,依  $y^*(t)$  很易分析系统动态性能。另一方面,在分析和校正一个系统时,了解闭环极点(即特征根)在  $z$  面上的位置与动态响应的关系,具有指导意义。

(1) 采样系统的单位阶跃响应

若采样系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (m < n) \quad (5.7-23)$$

式中  $z_i$  和  $p_i$  分别为  $\Phi(z)$  的零点和极点。当系统输入信号为单位阶跃时,系统输出量的  $z$  变换为

$$Y(z) = \frac{K^* \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \frac{z}{z-1} \quad (5.7-24)$$

假设系统无相重的闭环极点,对式(5.7-24)求  $z$  反变换,可得系统在采样时刻的输出值为

$$y(kT) = K_0 + \sum_{p_i \text{ 实数}} A_i (p_i)^k + \sum_{p_i \text{ 复数}} 2 |B_i| |P_i|^{-k} \cos(k\theta_i + \varphi_i) \quad (5.7-25)$$

式(5.7-25)中第一项为常数项,表示系统的稳态输出。第二项和第三项表示系统的实根和复数根组成的系统暂态响应。

(2) 闭环脉冲传递函数的极点对系统输出暂态分量的影响

若系统是稳定的,即系统闭环极点均分布在  $z$  平面的单位圆内,那么式(5.7-25)第二、第三项所表示的系统输出的各暂态分量都会随  $k$  的增大而衰减。对于在单位圆内几种极点分布情况所对应的暂态分量规律如下:

- 当  $p_i$  为正实数时,其所对应的  $y_i(kT)$  为单调衰减函数,如图 5.7-12 示出的  $p_1, p_2$  及其分别对应的暂态分量  $y_1(kT)$  和  $y_2(kT)$ 。

- 当  $p_i$  为负实数时,  $y_i(kT)$  为正负交替出现的衰减函数。当  $k$  为奇数时,  $(p_i)^k < 0$ ; 当  $k$  为偶数时,  $(p_i)^k > 0$ 。如图 5.7-12 示出的  $p_3$  和其对应的暂态分量  $y_3(kT)$ , 这种情况的暂态分量振荡频率最高,特性最差。

- 当  $p_i$  和  $p_{i-1}$  为一对共轭复数时,其对应的暂

态分量  $y_{i,i-1}(kT)$  为衰减振荡,如图 5.7-12 示出的  $p_4, p_5$  及其对应的暂态分量  $y_{4,5}(kT)$ 。

5.7.7 采样控制系统的稳态误差

对图 5.7-13 所示的单位反馈采样系统稳态误差的计算示于表 5.7-4。

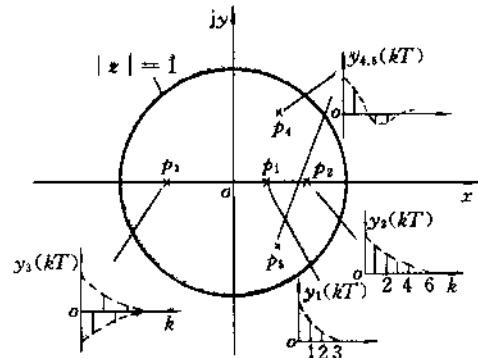


图 5.7-12 采样系统闭环极点分布与其对应的暂态分量图

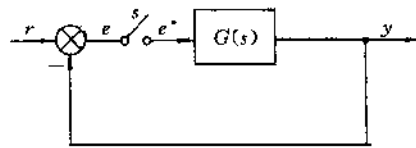


图 5.7-13 单位反馈采样系统

表 5.7-4 采样时刻的稳态误差  $e^*(\infty)$

系统型别	阶跃输入 $r(t) = 1(t)$ $R(z) = \frac{z}{z-1}$	斜坡输入 $r(t) = t$ $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$	抛物线输入 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ $R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
0 型	$\frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+G(1)}$	$\infty$	$\infty$
I 型	0	$\frac{1}{K_v} = \frac{T}{G_1(1)}$	$\infty$
II 型	0	0	$\frac{1}{K_a} = \frac{T^2}{G_2(1)}$

对表 5.7-4 的几点说明:

- 对表中的位置误差系数  $K_p$ 、速度误差系数  $K_v$  和加速度误差系数  $K_a$  分别定义如下:

$$K_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

$$K_v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)]$$

$$K_a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G(z)]$$

• 表中的  $G(1)$  为 0 型系统的  $G(z)$  在  $z=1$  时的脉冲传递函数值;  $G_1(1)$  为 I 型系统的  $G(z)$  在消去  $z=1$  的极点之后, 在  $z=1$  时的脉冲传递函数值;  $G_2(1)$  为 II 型系统的  $G(z)$  在消去了  $z=1$  的极点以后, 在  $z=1$  时的脉冲传递函数值。

• 从表 3.7-4 中可看出, 采样控制系统的稳态

误差不但与系统典型输入信号形式和系统型别及开环增益有关, 而且对有差系统的稳态误差还与采样周期的大小有关, 缩短采样周期将会减小稳态误差。

### 5.7.8 连续系统离散化

在进行采样系统分析设计时, 常需要把连续系统离散化。离散化的方法很多, 各有优缺点, 现将几种常见的离散化方法列于表 5.7-5。表中的  $T$  为采样周期。

表 5.7-5 常见的传递函数离散化方法

方法名称	离散化方法	说明
$z$ 变换法	其步骤为: (1) 求出 $G(s)$ 的极点, 把 $G(s)$ 分解成部分分式; (2) 根据 $z$ 变换表, 查出每个部分分式所对应的 $z$ 变换式; (3) 对上面各 $z$ 变换式整理得离散化后的脉冲传递函数。	这种方法要求 $G(s)$ 的截止频率远小于采样频率, 否则频率特性将产生重叠。然而对于大多数控制系统的校正装置来讲, 并非都只是低通滤波器, 有的满足不了上述要求, 因此, 限制了这种方法的使用
矩形积分法 (又称一阶差分近似法)	$G(z) = G(s) \Big _{s=1-\frac{z-1}{T}}$	这种方法相当于后向差分
	$G(z) = G(s) \Big _{s=\frac{z-1}{T}}$	这种方法相当于前向差分
梯形积分法 (又称双线性变换法)	$G(z) = G(s) \Big _{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}$	梯形积分法要比矩形积分法更近似实际, 所以在应用时应优先采用梯形积分法

### 5.7.9 数字 PID 控制算法

PID 控制器的作用在连续系统中是熟知的, 在离散控制系统中也广泛采用数字 PID 控制器。用微型计算机去实现 PID 的算法很多而且比较灵活。

模拟量的 PID 控制算式为

$$u(t) = K \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (5.7-26)$$

式中  $e(t)$ ——系统的偏差信号(即为控制器的输入);

$u(t)$ ——系统的控制量(即为控制器的输出);

$K$ ——比例增益;

$T_i$ ——积分时间常数;

$T_d$ ——微分时间常数。

将模拟量的 PID 控制算式(5.7-26)用几种方法

进行离散化, 得出数字化的 PID 基本算法, 示于表 5.7-6 中, 表中  $T$  为采样周期。

对于表 5.7-6 中的位置型算式, 当由计算机实现时不够方便, 这是因为要累加偏差  $e(j)$ , 不仅要占用较多的存储单元, 且不利于编程序。而增量型算式在编程上要比位置型算式方便, 且少占存储单元。

### 5.7.10 采样周期的选取

采样周期  $T$  或采样频率  $\omega_s$  是离散控制系统的重要参数, 尤其是计算机控制系统设计首先要考虑的问题。

根据采样定理, 采样周期  $T \leq \pi/\omega_{\max}$ 。由于被控对象的物理过程及参数的变化比较复杂, 致使模拟信号的最高角频率  $\omega_{\max}$  很难确定。采样定理仅从理论上给出了采样周期的上限, 实际采样周期的选取要受到多方面因素的制约。

表 5.7-6 数字 PID 控制算式

离散化方法	数字 PID 控制算式
矩形积分近似法	非递推算法(也称位置型算式) $u(k) = Ke(k) + K \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j) + K \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)]$ $= Ke(k) + K_i \sum_{j=0}^k e(j) + K_d [e(k) - e(k-1)]$ 式中 $K$ 称比例增益; $K_i = K \frac{T}{T_i}$ 称积分系数; $K_d = K \frac{T_d}{T}$ 称微分系数
	递推算法(也称增量型算式) $u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$ 或写成 $\Delta u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$ 式中 $q_0 = K \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)$ $q_1 = -K \left(1 + \frac{2T_d}{T}\right)$ $q_2 = K \frac{T_d}{T}$
梯形积分近似法	非递推算法(也称位置型算式) $u(k) = K \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \left[ \frac{e(0) + e(k)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} e(j) \right] + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\}$
	递推算法(也称增量型算式) $u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$ 或写成 $\Delta u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$ 式中 $q_0 = K \left(1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T}\right)$ $q_1 = K \left(1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{2T_d}{T}\right)$ $q_2 = K \frac{T_d}{T}$

采样周期  $T$  的选取一般应考虑下列几个因素:

- 采样周期应远小于作用于系统上的干扰信号的周期。在工程实用中,常把干扰引起的偏差达到规定的最大允许值时的采样周期定为系统允许的最大采样周期。

- 采样周期应比被控对象的时间常数小得多,否

则采样信号无法反应瞬变过程。若被控对象的时间常数为  $T_p$ , 其纯延时时为  $\tau$ , 那么当  $\tau=0$  或  $\tau < 0.5T_p$  时, 可选采样周期  $T$  介于  $0.1T_p$  至  $0.2T_p$  之间; 当  $\tau \geq 0.5T_p$  时, 可选  $T$  等于或接近  $\tau$ 。

- 采样周期的选取要考虑执行器的响应速度。如果执行器的响应速度比较慢, 那么过短的采样周期将失去意义。



• 采样周期的选取要考虑对控制系统调节品质的要求。在计算机运算速度允许的情况下,采样周期越短,则调节品质越好。

• 采样周期的选取要考虑性能价格比。从控制性能考虑,希望采样周期短,但计算机运算速度,以及 A/D 和 D/A 的转换速度相应地提高,导致计算机的费用增加。

• 采样周期的选取还应考虑计算机所承担的工作量。如果控制的回路数量多,计算量大,则采样周期的选取要加长;反之,可以缩短。

• 对于采用 PID 控制器的计算机控制系统,采样周期的选取应与 PID 参数的整定综合考虑。

由上述分析可知,采样周期的选择受多种因素影响,有些是相互矛盾的,必须视具体情况和主要的要求

作出折中选择。在具体选择采样周期时,可参照表 5.7-7 所示的经验数据,再通过现场试验最后确定合适的采样周期。表 5.7-7 仅列出几种经验采样周期  $T$  的上限,随着计算机技术的进步及其成本的下降,一般可以选取较短的采样周期。

表 5.7-7 经验采样周期

被 控 量	采 样 周 期 /s
流量	1~2
压力	3~5
液位	6~8
温度	10~15
成分	15~20